

1 Het $3n + 1$ -vermoeden

Benne de Weger

Technische Universiteit Eindhoven

1.1 Inleiding

1.1.1 Het vermoeden

Neem een natuurlijk getal n . Als het even is, deel het door 2. Als het oneven is, vermenigvuldig het met 3 en tel er 1 bij op. Met de uitkomst doe je hetzelfde, net zolang je een patroon herkent.

Omdat voor een oneven n het volgende getal $3n + 1$ altijd even is, is de daaropvolgende stap altijd delen door 2. Deze twee stappen nemen we daarom samen tot één stap. Het hierboven beschreven proces is dan het vanuit startwaarde n *itereren* van de zogeheten $3n + 1$ -*functie*:

$$T(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n & \text{als } n \text{ even,} \\ \frac{1}{2}(3n + 1) & \text{als } n \text{ oneven.} \end{cases}$$

Dit iteratieproces kunnen we noteren met pijlen, bijvoorbeeld:

$$6 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$$

Dit voorbeeld laat zien dat je met de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 8 als startwaarde iedere keer op 1 uitkomt, en dan kom je in de *cykel* $1 \leftrightarrow 2$ terecht waar je nooit meer uitkomt. Een ander voorbeeld:

$$7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow \dots$$

laat zien dat je met startwaarde 7 na zeven iteraties op 5 uitkomt, waarvan we al wisten dat je dan vervolgens in de cykel $1 \leftrightarrow 2$ belandt.

De k -e iteratie van n onder de functie T noteren we als $T^k(n)$. Dus bijvoorbeeld $T^7(7) = 5$ en $T^{11}(7) = 1$.

Het $3n + 1$ -vermoeden zegt nu dat dit iteratieproces bij iedere mogelijke startwaarde altijd een keer bij 1 zal uitkomen, en dus ‘eindigt’ in de cykel $1 \rightleftharpoons 2$. Dat is een wat informele bewering, die eenvoudig formeel te maken is, als volgt:

Het $3n + 1$ -vermoeden:

Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ is er een $k \in \mathbb{N}$ zodat $T^k(n) = 1$.

De iteratierij $n \rightarrow T(n) \rightarrow T^2(n) \rightarrow \dots$ heet de *baan* van n . Als een baan weer op z’n beginpunt uitkomt, dus voor zekere $k, n \in \mathbb{N}$ geldt dat $T^k(n) = n$, dan gaat de baan zich vanaf dat moment herhalen: $n \rightarrow T(n) \rightarrow \dots \rightarrow T^{k-1}(n) \rightarrow T^k(n) = n \rightarrow T(n) \rightarrow \dots$. Zo’n herhaald stuk noemen we een *cykel*, en noteren we als $(n, T(n), T^2(n), \dots, T^{k-1}(n))$. We zien $(n, T(n), T^2(n), \dots, T^{k-1}(n))$ en $(T(n), T^2(n), \dots, T^{k-1}(n), n)$ als dezelfde cykel, dus $(1, 2) = (2, 1)$. Een baan noemen we *convergent* als er een cykel in zit (en daar ‘eindigt’ die baan dan ook in), en anders *divergent*. De cykel $1 \rightleftharpoons 2$ heet ook wel de *triviale cykel*.

Het $3n + 1$ -vermoeden kan gezien worden als de combinatie van twee onafhankelijke uitspraken:

Het $3n + 1$ -cykelvermoeden:

De $3n + 1$ -functie kent geen niet-triviale cyclen.

Het $3n + 1$ -convergentievermoeden:

De $3n + 1$ -functie kent geen divergente banen.

Banen kunnen lang divergent lijken en tot grote hoogten stijgen:

$27 \rightarrow 41 \rightarrow 62 \rightarrow 31 \rightarrow 47 \rightarrow 71 \rightarrow 107 \rightarrow 161 \rightarrow 242 \rightarrow 121 \rightarrow 182 \rightarrow 91 \rightarrow 137 \rightarrow 206 \rightarrow 103 \rightarrow 155 \rightarrow 233 \rightarrow 350 \rightarrow 175 \rightarrow 263 \rightarrow 395 \rightarrow 593 \rightarrow 890 \rightarrow 445 \rightarrow 668 \rightarrow 334 \rightarrow 167 \rightarrow 251 \rightarrow 377 \rightarrow 566 \rightarrow 283 \rightarrow 425 \rightarrow 638 \rightarrow 319 \rightarrow 479 \rightarrow 719 \rightarrow 1079 \rightarrow 1619 \rightarrow 2429 \rightarrow 3644 \rightarrow 1822 \rightarrow 911 \rightarrow 1367 \rightarrow 2051 \rightarrow 3077 \rightarrow 4616 \rightarrow \dots$

maar toch convergent blijken en uitkomen in de triviale cykel:

$\dots \rightarrow 4616 \rightarrow 2308 \rightarrow 1154 \rightarrow 577 \rightarrow 866 \rightarrow 433 \rightarrow 650 \rightarrow 325 \rightarrow 488 \rightarrow 244 \rightarrow 122 \rightarrow 61 \rightarrow 92 \rightarrow 46 \rightarrow 23 \rightarrow 35 \rightarrow 53 \rightarrow 80 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightleftharpoons 1$.

1.1.2 Geschiedenis

Het $3n + 1$ -vermoeden is (naar eigen zeggen) rond 1930 bedacht door Lot-har Collatz, een Duitse wiskundige. In 1950 raakte het vermoeden breder

bekend doordat hij er met verschillende wiskundigen op het International Congress of Mathematicians in Cambridge (Mass.) over sprak. In de jaren 60 verschenen de eerste artikelen over verwante problemen, o.a. over een variant beschreven door de bekende Franse dichter Raymond Queneau, gerelateerd aan rijmschema's in 12e-eeuwse poëzie. In 1971 verschijnt het exacte vermoeden voor het eerst in druk, en in 1972 schrijft de bekende wiskunde-popularisator Martin Gardner erover, waarna het probleem echt beroemd wordt. In de (kennelijk complete) geannoteerde bibliografie die Jeffrey Lagarias bijhoudt [L3, L4] is te zien hoezeer het vermoeden de wiskundigen in de greep heeft gekregen, niet alleen in het aantal publicaties:

decennium:	60-69	70-79	80-89	90-99	00-09
aantal publicaties:	8	34	52	103	134

maar ook in de verscheidenheid van wiskundige deelgebieden waaraan het vermoeden gerelateerd blijkt te kunnen worden. In de literatuur staat het $3n + 1$ -vermoeden ook bekend als o.a. het vermoeden van Collatz, van Hasse, van Kakutani, van Ulam, als het Syracuse-vermoeden en als het 'hailstone'-vermoeden. De lezer die er meer over wil weten kan worden aangeraden het oude overzichtsartikel [L1] en het nieuwe boek [L2] van Jeffrey Lagarias op te slaan.

In dit artikel willen we de lezer enige argumenten aanreiken waarom hij / zij wel eens in het vermoeden zou kunnen gaan geloven, en een aantal verbanden aangeven met uiteenlopende wiskundige deelterreinen. Diverse van die verbanden leiden tot interessante herformuleringen van het $3n + 1$ -vermoeden in een totaal andere 'taal'.

Overigens is het vermoeden volstrekt nutteloos. Ionica Smeets [Sm] noemde het in de Vakantiecursus van 2010 een "gênant probleem", omdat het op feestjes aan leken makkelijk uit te leggen is wat het probleem is, maar niet dat al die slimme wiskundigen zo'n ogenschijnlijk makkelijk probleem nog steeds niet hebben kunnen oplossen.

1.1.3 Grafentaal

Een *graaf* (resp. *gerichte graaf*) is een verzameling punten met lijnen (resp. pijlen) tussen sommige paren punten. Eigenlijk hebben we hierboven al grafen gebruikt om de $3n + 1$ -iteraties te visualiseren. De $3n + 1$ -graaf heeft als punten alle positieve gehele getallen, en voor iedere $n \in \mathbb{N}$ loopt er een pijl van n naar $T(n)$. In Figuur 1.1 is het deel van de $3n + 1$ -graaf getekend met alle getallen t/m 100 en hun banen (in iedere baan

zijn eventuele getallen boven de 100 weggelaten, en dan is telkens tussen rechte haken aangegeven hoeveel getallen zijn weggelaten).

In deze graaf heeft ieder punt één uitgaande pijl en 1 of 2 inkomende pijlen, al naar gelang $n \not\equiv 2 \pmod{3}$ dan wel $n \equiv 2 \pmod{3}$ is. Immers, voor iedere n is er een inkomende pijl uit $2n$, en als er een andere inkomende pijl is moet die wel van de oneven m komen met $n = \frac{1}{2}(3m + 1)$, en dat betekent dat $m = \frac{1}{3}(2n - 1)$, wat precies dan geheel is als $n \equiv 2 \pmod{3}$.

Een graaf bestaat uit *samenhangscomponenten* (kortweg *componenten* genoemd), gedefinieerd door de regel dat twee punten in dezelfde component zitten dan en slechts dan als er een pad is tussen de twee punten (waarbij ook tegen de pijlrichting in gelopen mag worden). Een graaf die uit slechts één component bestaat noemen we *samenhangend*.

Dit geeft meteen een herformulering van het $3n + 1$ -vermoeden:

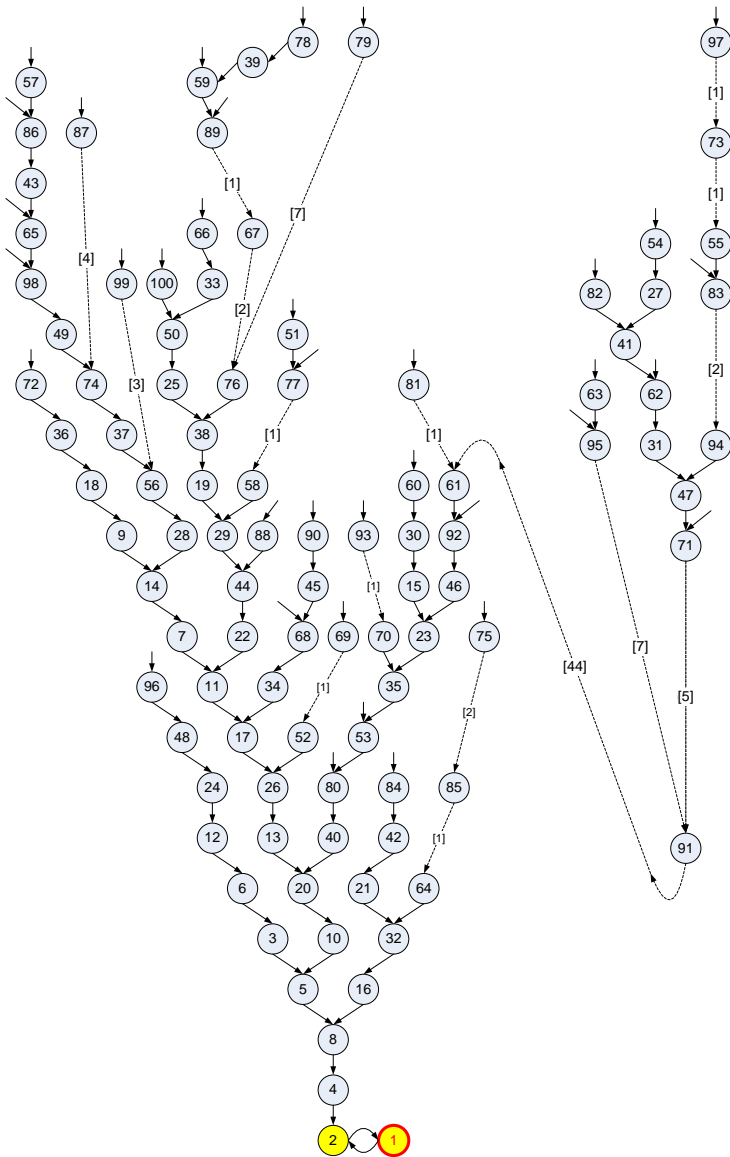
Het $3n + 1$ -vermoeden, herformulering 1:

De $3n + 1$ -graaf is samenhangend.

In zekere zin is er hier niets gebeurd: het is slechts een vertaling van het vermoeden in termen van grafen. Toch geeft dit al wel wat inzicht, vind ik. Onlangs nog was er een serieuze wiskundige [O] die beweerde het vermoeden bewezen te hebben, maar wiens argument gebaseerd was op de veronderstelling dat er tussen ieder tweetal getallen een pad was in de graaf; en dat cruciale punt vergat hij te bewijzen [dW]. Niet verwonderlijk overigens was zijn argument ook overbodig ingewikkeld.

Even er van uitgaande dat we geen idee hebben waarom we het vermoeden zouden moeten geloven, zodat we met alle eventualiteiten rekening willen houden: we kunnen nu in de graaf onderscheiden tussen convergente componenten (die een cykel bevatten) en divergente componenten (die geen cykel bevatten). In een component kan slechts één cykel zitten. Want uit een cykel kun je niet meer ontsnappen door de pijlen te volgen, en als er dan een pad van de ene cykel naar de andere zou moeten lopen moet je vertrekkend vanuit de ene cykel tegen de pijl in lopen, en bij het betreden van de andere cykel met de pijl meelopen, maar dan zou er ergens op het pad een punt moeten zijn met twee uitgaande pijlen, en dat is in tegenspraak met het feit dat elk punt maar één uitgaande pijl heeft.

Zo zien we dus ook herformuleringen van de deelvermoedens:



Figuur 1.1: De $3n + 1$ -graaf.

Het $3n + 1$ -cykelvermoeden, herformulering:

De $3n + 1$ -graaf heeft slechts één convergente component.

Het $3n + 1$ -convergentievermoeden, herformulering:

De $3n + 1$ -graaf heeft geen divergente componenten.

1.1.4 Verwante problemen

Het geeft vaak al wat inzicht in een vermoeden als je verwante problemen bestudeert. Waarom bijvoorbeeld in de functie T niet de getallen 3 en $+1$ vervangen door andere getallen? Dat wil zeggen, we definiëren voor oneven $p > 0$ en oneven q de $pn + q$ -functie:

$$T_{p,q}(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n & \text{als } n \text{ even,} \\ \frac{1}{2}(pn + q) & \text{als } n \text{ oneven.} \end{cases}$$

Dus $T = T_{3,1}$. Het geval $p = 1$ is niet interessant, omdat voor $n > q$ de functie $T_{1,q}$ altijd daalt, en je dus met iedere baan op den duur onder q uitkomt, en daar dan ook blijft. Dus nemen we vanaf nu $p \geq 3$. Het eerste wat wellicht voor de hand ligt te bekijken is de $3n - 1$ -functie $T_{3,-1}$. Maar deze komt neer op de $3n + 1$ -functie op de negatieve getallen. Immers, als we het domein van T uitbreiden tot alle gehele getallen, en hetzelfde functievoorschrift voor T blijven hanteren, dan kunnen we opmerken dat $T_{3,-1}(n) = -T(-n)$. Opgave: toon dit aan.

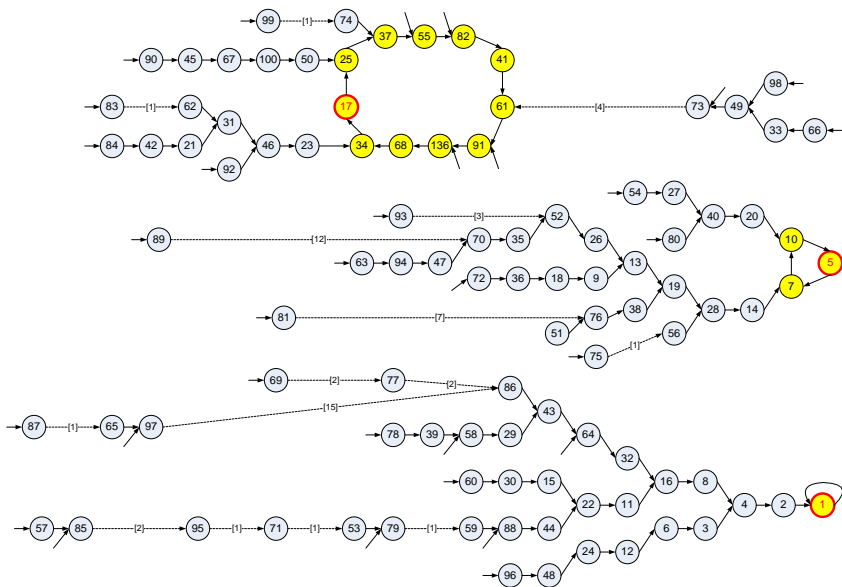
Figuur 1.2 toont (een stuk van) de $3n - 1$ -graaf. Wat meteen opvalt is dat er drie cycli zijn voor de $3n - 1$ -functie, en dat deze graaf dus (tenminste) drie componenten heeft. Dat betekent in ieder geval al dat het $3n + 1$ -vermoeden niet direct te generaliseren valt. Dat er precies één component zou zijn is kennelijk geen algemene eigenschap van dit soort functies, maar zit vast aan de gekozen parameters. Voor de $3n - 1$ -functie kunnen we het volgende vermoeden formuleren.

Het $3n - 1$ -vermoeden:

Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ is er een $k \in \mathbb{N}$ zodat $T^k(n) \in \{1, 5, 17\}$.

In grafen-taal: De $3n - 1$ -graaf heeft precies 3 componenten.

Figuur 1.3 laat een ander interessant geval zien: de $3n + 3$ -graaf. Bij bestudering blijkt de deelgraaf van alle drievouden precies de structuur van de $3n + 1$ -graaf te bezitten, alleen dan met alle getallen vermenigvuldigd met 3. In Figuur 1.3 is dit met een kleur aangegeven. Wat het $3n + 3$ -vermoeden moet worden kunt u nu zelf bedenken. Uit het $3n + 3$ -vermoeden



Figuur 1.2: De $3n - 1$ -graaf.

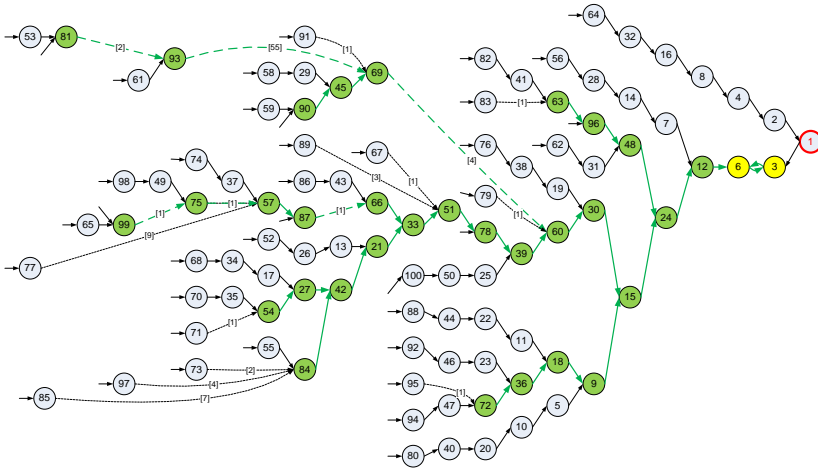
volgt het $3n + 1$ -vermoeden. Andersom is dit ook waar: uit het $3n + 1$ -vermoeden volgt het $3n + 3$ -vermoeden. Ik laat dat aan u als een opgave om dit aan te tonen.

Een volgend interessant geval is de $5n + 1$ -graaf. Deze is getekend in Figuur 1.4. Weer zijn er in ieder geval 3 cyclen te ontdekken, en dus tenminste 3 componenten. Maar nu lijken er ook de nodige divergente componenten te bestaan. Het $5n + 1$ -vermoeden, waarvoor we in een volgend hoofdstuk een argument zullen aandragen, luidt dan ook als volgt (we geven alleen een formulering in grafen-taal omdat dat nu echt makkelijker is):

Het $5n + 1$ -vermoeden:

De $5n + 1$ -graaf heeft precies 3 convergente componenten, en oneindig veel divergente componenten.

Vermoedelijk zijn alle in Figuur 1.4 getekende componenten inderdaad verschillend. Van de getekende componenten zonder zichtbare cykel is niet bekend of ze verschillend zijn, laat staan dat bekend is of ze wel echt divergent zijn, of niet stiekum ver weg toch nog een cykel blijken te hebben.

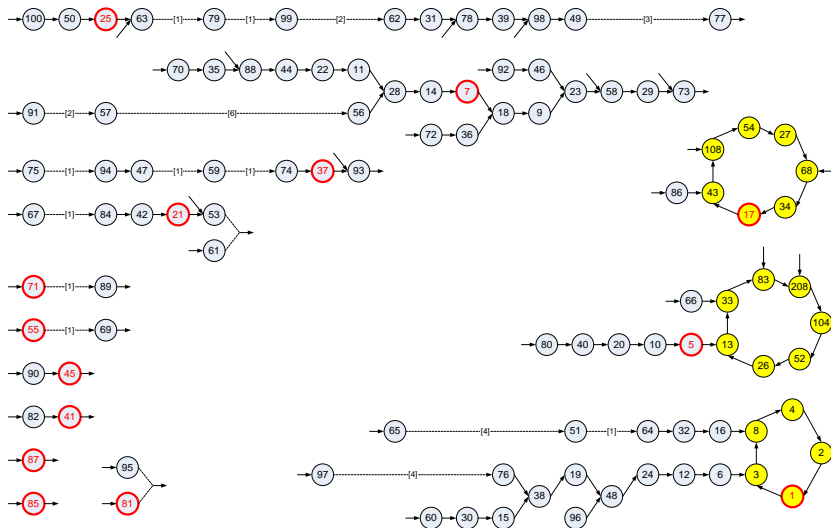


Figuur 1.3: De $3n + 3$ -graaf.

1.1.5 De rationale $3n + 1$ -graaf

Laten we even terugkeren naar de $3n + 3$ -graaf. Door alle getallen door 3 te delen zien we in dat dit in feite een uitbreiding van de $3n + 1$ -graaf is tot de rationale getallen met noemer 1 of 3. Net zo kunnen we inzien dat de $3n + q$ -graaf voor oneven $q > 0$ terug te brengen tot een uitbreiding van de $3n + 1$ -graaf tot de rationale getallen met noemer een deler van q . Maar dan kunnen we ook meteen de rationale $3n + 1$ -graaf bekijken, waarbij we toestaan dat n een willekeurig rationaal getal met oneven noemer is. (Merk op dat even noemers niet interessant zijn, daarvoor kunnen we niet op een goede manier definiëren of deze getallen even of oneven zijn. Een rationaal getal met een oneven noemer kunnen we wel even / oneven noemen, namelijk aan de hand van het even / oneven zijn van de teller.)

Zie Figuur 1.5 voor een deel van de rationale $3n + 1$ -graaf. In feite is deze rationale $3n + 1$ -graaf de vereniging van alle $3n + q$ -grafen in één graaf gestopt. Nu laten we zien dat ieder punt in deze graaf twee inkomende pijlen heeft. Bij een punt in de graaf hoort een rationaal getal $\frac{a}{b}$, met b oneven. Er komt in ieder geval een pijl van $\frac{2a}{b}$, een andere zou moeten komen van $\frac{c}{d}$ met oneven d zodat $\frac{3c}{2d} + \frac{1}{2} = \frac{a}{b}$. Hieruit halen we $\frac{c}{d} =$

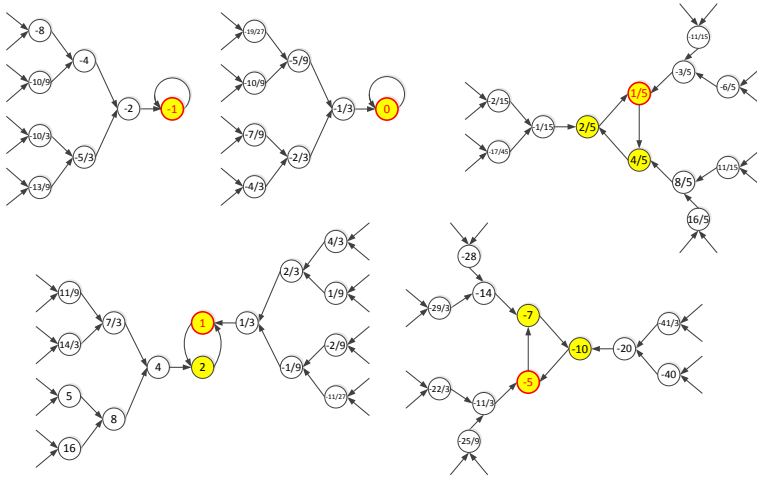


Figuur 1.4: De $5n + 1$ -graaf.

$\frac{2a - b}{3b}$. Als $2a - b$ een 3-voud is, dan volgt $d = b$ en $c = (2a - b)/3$, anders volgt $d = 3b$ en $c = 2a - b$. In alle gevallen is c oneven, en dat toont aan dat deze $\frac{c}{d}$ inderdaad anders is dan $\frac{2a}{b}$. Dus er zijn altijd twee inkomende pijlen bij ieder punt. Terugredenerend betekent dit dat op ieder punt in de graaf een zogeheten *volledige binaire boom* staat.

We gaan nu kijken naar cyclen. Een cykel heeft altijd een zogeheten even/oneven-structuur, die aangeeft of de opeenvolgende getallen in de cykel even (e) dan wel oneven (o) zijn. Een voorbeeld: de cykel $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ (dit is inderdaad een cykel want $\frac{3}{2} \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$) heeft de even/oneven-structuur **eeo**. Omdat een cykel een cykel is, is deze structuur identiek aan **eoe** en aan **oe e**.

Deze even/oneven-structuur schrijft precies voor wat op ieder moment de keuze is in de $3n + 1$ -functie. Dit stelt ons in staat een vergelijking op te stellen voor een cykel met een gegeven structuur. Een voorbeeld: als we uitgaan van de even/oneven-structuur **eeo** en beginnen met het getal x , dan zal x even zijn, en dus $x \rightarrow T(x) = x/2$. Maar op deze tweede



Figuur 1.5: De rationale $3n + 1$ -graaf.

plek in de cykel moet ook een even getal staan, dus $T(x) \rightarrow T^2(x) = T(x)/2 = x/4$. En dit derde getal in de cykel moet nu oneven zijn, dus $T^3(x) = T(x/4) = \frac{3(x/4) + 1}{2} = 3x/8 + 1/2$. Omdat de cykel rond is en lengte 3 heeft is $T^3(x) = x$, dus $3x/8 + 1/2 = x$, en hier staat een eenvoudige eerstegraads-vergelijking in x , die slechts één oplossing heeft. Dat is voor iedere cykel net zo, en die oplossing is altijd een rationaal getal met een oneven noemer (in bovenstaand voorbeeld is dat $x = \frac{4}{5}$). Gevolg is dat bij iedere even/oneven-structuur precies één cykel in de rationale $3n + 1$ -graaf hoort.

Een lijstje van mogelijke even/oneven-structuren (deze staan in de literatuur bekend als *Lyndon-woorden*):

- lengte 1: 2 mogelijkheden: **e**, **o**, horend bij de cyclen (0) , (-1) ;
- lengte 2: 1 mogelijkheid: **eo**, horend bij de triviale cykel $(1, 2)$;
- lengte 3: 2 mogelijkheden: **eeo**, **eoo**, horend bij de cyclen $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$, $(-10, -5, -7)$;
- lengte 4: 3 mogelijkheden: **eeeo**, **eeoo**, **eooo**, horend bij de cyclen

$$\left(\frac{8}{13}, \frac{4}{13}, \frac{2}{13}, \frac{1}{13}\right), \left(\frac{20}{7}, \frac{10}{7}, \frac{5}{7}, \frac{11}{7}\right), \left(-\frac{38}{11}, -\frac{19}{11}, -\frac{23}{11}, -\frac{29}{11}\right);$$

- lengte 5: 6 mogelijkheden: **eeeee**, **eeooo**, **eeoeo**, **eeooo**, **eeooo**, **eeooo**, horend bij de cyclen $\left(\frac{16}{29}, \frac{8}{29}, \frac{4}{29}, \frac{2}{29}, \frac{1}{29}\right)$, $\left(\frac{40}{23}, \frac{20}{23}, \frac{10}{23}, \frac{5}{23}, \frac{19}{23}\right)$, $\left(\frac{28}{23}, \frac{14}{23}, \frac{7}{23}, \frac{22}{23}, \frac{11}{23}\right)$, $\left(\frac{76}{5}, \frac{38}{5}, \frac{19}{5}, \frac{31}{5}, \frac{49}{5}\right)$, $\left(\frac{58}{5}, \frac{29}{5}, \frac{46}{5}, \frac{23}{5}, \frac{37}{5}\right)$, $\left(-\frac{130}{49}, -\frac{65}{49}, -\frac{73}{49}, -\frac{85}{49}, -\frac{103}{49}\right)$,
- enzovoorts.

Merk op dat even/oneven-structuren waar al een repeterend patroon in zit, zoals **eeoe**, niet meegeteld worden. De bijbehorende vergelijking heeft namelijk exact dezelfde oplossing als die van de even/oneven-structuur **eo**, en dit komt dus gewoon neer op een cykel vaker dan één keer doorlopen.

De rationale $3n + 1$ -graaf heeft vermoedelijk geen divergente componenten. Een argument dat daar voor pleit zullen we in het volgende hoofdstuk zien. We hebben zojuist aangetoond dat er oneindig veel convergente componenten zijn, en we hebben een methode gezien om die allemaal systematisch te beschrijven. Zo'n convergente component bestaat uit een cykel, met op ieder punt van de cykel een volledige binaire boom. Ook als er een divergente component zou zijn, zou die een fraaie structuur hebben, namelijk een naar beide zijden onbegrensde volledige binaire boom. Deze rationale $3n + 1$ -graaf heeft dus op zich een heel fraaie structuur. Er is dan ook geen rationaal $3n + 1$ -cykelvermoeden, omdat we van de cyclen alles al weten. Wat overblijft is alleen het rationale $3n + 1$ -convergentievermoeden, het makkelijkst te geven in grafen-taal:

Het rationale $3n + 1$ -vermoeden:

De rationale $3n + 1$ -graaf heeft geen divergente componenten.

De oorspronkelijke $3n + 1$ -graaf is een deelgraaf van de rationale $3n + 1$ -graaf. Alleen is volstrekt onduidelijk hoe die er precies inzit.

1.1.6 De amusicale permutatie

Tenslotte noemen we een iets anderssoortige functie, die soms de ‘inverse $3n + 1$ -functie’ genoemd wordt, maar ten onrechte, want het is niet de inverse van de $3n + 1$ -functie. John Conway [C2] noemt het de *amusicale permutatie*. Het is de volgende functie:

$$U(n) = \begin{cases} \frac{3n}{2} & \text{als } n \text{ even is,} \\ \frac{3n+1}{4} & \text{als } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \frac{3n-1}{4} & \text{als } n \equiv -1 \pmod{4}. \end{cases}$$

1.2 Argumenten

1.2.1 Experimenteel

Een voor de hand liggende manier om het $3n + 1$ -vermoeden te testen is bruut rekenwerk. Met name Tomás Oliveira e Silva [OS] en Eric Roosendaal [R] hebben zich daar verdienstelijk voor gemaakt.

Stelling (Oliveira e Silva):

Het $3n + 1$ -vermoeden is waar voor alle $n < 5.764 \times 10^{18}$.

Dit is een indrukwekkende prestatie. Natuurlijk passen de rekenaars slimigheden toe om geen overbodig rekenwerk te doen, zoals de volgende:

- je kunt stoppen met de baan van n te berekenen zodra je een getal kleiner dan n bent tegengekomen,
- bepaalde klassen van getallen hoef je niet te bekijken, zoals getallen van de vorm $128m + 15$, aangezien $T^7(128m + 15) = 81m + 10$, en dat is kleiner dan $128m + 15$,

en vele andere.

Hoewel $n < 5.764 \times 10^{18}$ best een hoge grens is, bereik je met dit soort rekenwerk, hoe ver je ook zou kunnen komen, natuurlijk nooit meer dan 0% van het totale zoekgebied. Toch is het bijzonder nuttig werk, met ook meer implicaties dan alleen maar dat een eventuele tweede cykel of een divergente baan als kleinste getal een getal boven de 5.764×10^{18} zou moeten hebben. Daar komen we in het volgende hoofdstuk op terug.

1.2.2 Probabilistisch

Stel we trekken een random getal n , dus met kans $\frac{1}{2}$ even en met kans $\frac{1}{2}$ oneven. Wat kunnen we nu zeggen over de kans dat $T(n)$ even dan wel oneven is? Daarvoor moeten we kijken naar $n \pmod{4}$:

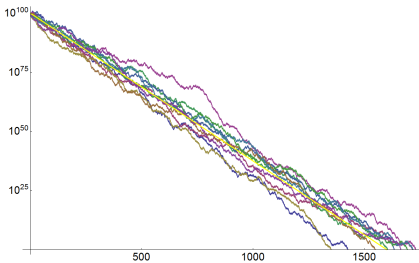
- als $n = 4m$ dan is $T(n) = 2m$ even,
- als $n = 4m + 1$ dan is $T(n) = 6m + 2$ even,
- als $n = 4m + 2$ dan is $T(n) = 2m + 1$ oneven,
- als $n = 4m + 3$ dan is $T(n) = 6m + 5$ oneven,

dus $T(n)$ is ook met kans $\frac{1}{2}$ even en met kans $\frac{1}{2}$ oneven. En het lijkt niet onredelijk te veronderstellen dat de kansen voor n en voor $T(n)$ onafhankelijk zijn.

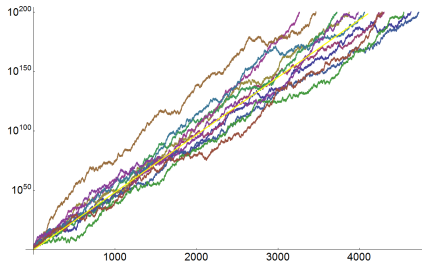
Voor heel grote n gaan we nu de $+1$ in de $\frac{1}{2}(3n+1)$ verwaarlozen, en zien we dat $T(n) = \frac{1}{2}n$ met kans $\frac{1}{2}$, en $T(n) \approx \frac{3}{2}n$ ook met kans $\frac{1}{2}$. Voor de k -e iteratie verwachten we dan dat $\approx \frac{1}{2}k$ maal met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd wordt, en $\approx \frac{1}{2}k$ maal met $\approx \frac{3}{2}$, zodat

$$T^k(n) \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} \left(\frac{3}{2}\right)^{k/2} n = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^k n.$$

Merk op dat $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0.866 < 1$. Dit laat zien dat itereren van T gemiddeld genomen een exponentieel dalend gedrag zal vertonen. We kunnen nu makkelijk schatten na hoeveel iteratiestappen je verwacht bij 1 uit te komen: $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^k n = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{\log(2/\sqrt{3})} \log n \approx 6.95 \log n$. Figuur 1.7 laat zien dat dit experimenteel heel aardig klopt: ik heb daar 10 willekeurige getallen in de buurt van 10^{100} genomen en de banen berekend en geplot; na ongeveer $6.95 \times \log 10^{100} \approx 1600$ stappen zijn alle banen inderdaad op 1 uitgekomen, en nog redelijk op de voorspelde manier ook. Deze figuur heeft op de verticale as een logaritmische schaal; de gele rechte is de lijn die begint bij 10^{100} en richtingscoëfficiënt $\log\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ heeft.



Figuur 1.7: Tien $3n+1$ -banen.



Figuur 1.8: Elf $5n+1$ -banen.

Voor de $3n+q$ -functie werkt precies hetzelfde argument, wellicht niet voor n die klein zijn ten opzichte van q , maar verreweg de meeste n zijn natuurlijk groot vergeleken met q . Dit is een, wat mij betreft vrij sterk, argument voor het rationale $3n+1$ -vermoeden, dat zegt dat iedere $3n+q$ -baan in een cykel zal uitkomen.

Er zijn verdergaande stochastische modellen toegepast op de $3n+1$ -banen, die voorspellingen doen als:

- hoge banen: er bestaan, met kans vrijwel 1, banen die (beginnend bij n) als hoogste punt $\approx n^{2+o(1)}$ bereiken na $7.645 \log n$ stappen; die banen zullen na nog eens $13.9 \log n$ stappen terugvallen tot 1;
- lange banen: er bestaan, met kans vrijwel 1, banen die (beginnend bij n) pas na $41.7 \log n$ stappen op 1 uitkomen.

Ook deze modellen zijn experimenteel geverifieerd.

We kunnen het eenvoudige probabilistische model dat we hierboven op de $3n + 1$ -functie hebben toegepast ook op de $5n + 1$ -functie loslaten. Het argument gaat dan net zo, maar levert dan $T_{5,1}^k(n) \approx (\frac{1}{2}\sqrt{5})^k n$ op, waarbij we nu moeten opmerken dat $\frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1.12$. Opvallend is dat deze factor nu boven de 1 uitkomt, en dat laat zien dat de banen voor de $5n+1$ -functie gemiddeld genomen exponentieel snel zullen gaan stijgen. Zie figuur 1.8, waar de banen van de getallen 7, 21, 25, 37, 41, 45, 55, 71, 81, 85 en 87 getekend zijn.

Voor de $pn + q$ -functie wordt deze vermenigvuldigingsfactor $\frac{1}{2}\sqrt{p}$, en die is voor oneven $p > 3$ altijd groter dan 1. De gemiddeld dalende $3n+q$ -functies zijn in de hele familie dus de uitzondering, en niet de regel.

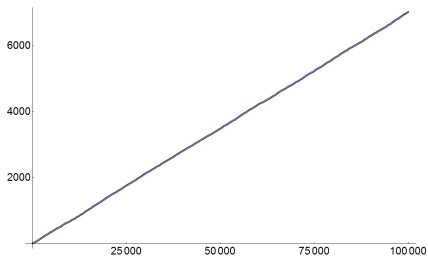
Dat deze vermenigvuldigingsfactor boven de 1 ligt is een sterk argument voor het vermoeden dat de banen van de $5n + 1$ -functie als regel divergent zijn, en slechts bij uitzondering in een cykel uitkomen. Dat het groeigedrag exponentieel is is ook uit te werken tot een argument dat twee banen beginnend in willekeurige startpunten elkaar vrijwel nooit zullen snijden. Vandaar het vermoeden dat er oneindig veel divergente banen zijn.

Dit neemt overigens niet weg dat van geen enkele $5n + 1$ -baan (afgezien van de 3 bekende convergente) bekend is of die divergent is.

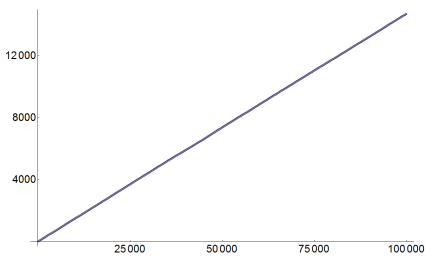
We kunnen proberen voor de $pn + 1$ -graaf (met $p = 5, 7, 9, \dots$) het aantal divergente componenten met een kleinste getal onder n te tellen, en dat aantal als functie van n plotten. Dat aantal blijkt telkens experimenteel vrijwel lineair te zijn. Zie Figuur 1.9-1.11.

De hellingen voor $p = 5, 7, \dots, 49$ zijn geplot in Figuur 1.12. Dit plaatje is vooralsnog (door mij) onbegrepen, maar ik geef direct toe dat ik er niet diep over heb nagedacht.

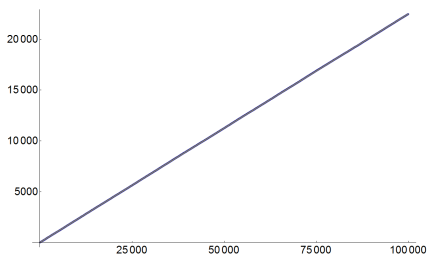
Ook voor de amusicale permutatie is dit eenvoudige stochastische model toepasbaar, zowel op de voorwaartse iteratie $n \rightarrow U(n) \rightarrow U^2(n) \rightarrow \dots$ als op de achterwaartse iteratie $n \rightarrow U^{-1}(n) \rightarrow U^{-2}(n) \rightarrow \dots$. Een opgave voor de lezer is om aan te tonen dat de vermenigvuldigingsfactor voor U



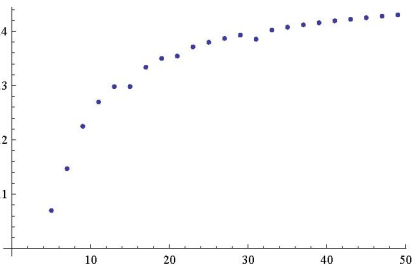
Figuur 1.9: $p = 5$



Figuur 1.10: $p = 7$



Figuur 1.11: $p = 9$



Figuur 1.12: Hellingen ($p = 5 - 49$)

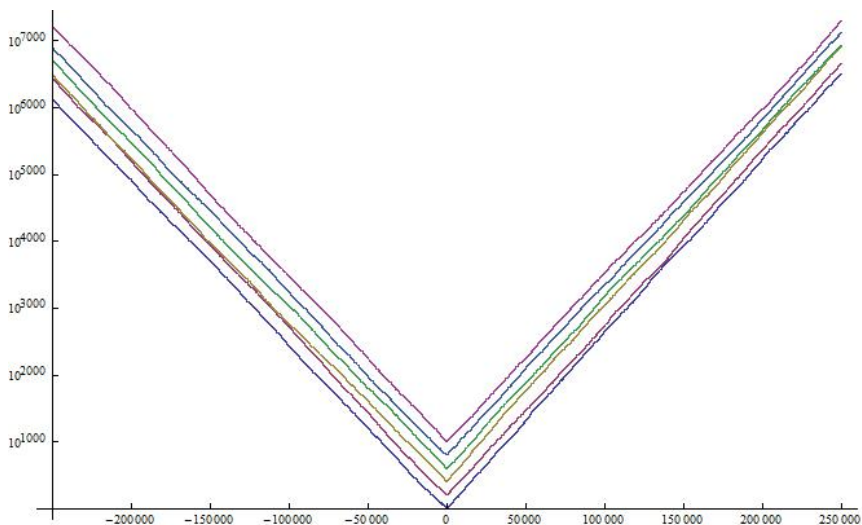
Aantallen divergente banen voor de $pn + 1$ -functie met x als kleinste getal, als functie van x .

dan uitkomt op $\frac{3}{4}\sqrt{2} \approx 1.061$, en die voor U^{-1} op $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4} \approx 1.058$. Opvallend is dat beide factoren groter dan 1 zijn, en ook dat ze verschillend zijn. In Figuur 1.13 is van het getal 8 en van willekeurig gekozen getallen met 200, 400, 600, 800 en 1000 cijfers zowel de voorwaartse als de achterwaartse baan getekend. Kennelijk is het zo dat voor een willekeurig gekozen n de kans bijna 1 is dat hij helemaal onderin zijn eigen component zit. Een dergelijk plaatje staat ook in [C2].

1.2.3 Complexiteitstheoretisch

In 1972 heeft John Conway [C1] al laten zien dat er een generalisatie is van de $3n + 1$ -functie waarvan de iteratie een universele Turing-machine simuleert. Zie [C2] voor een concreet voorbeeld. Voor zo'n functie is het beslisprobleem "bereikt een baan een willekeurige macht van 2" onbeslisbaar. In zijn recente artikel [C2] zegt Conway:

It is likely that some simple Collatzian problems (possibly even



Figuur 1.13: Zes amusicale banen

the $3n + 1$ problem itself) will remain forever unsettleable.

Dat mag dan misschien zo zijn, en het is zeker een sterke indicatie voor de moeilijkheid van dit soort problemen, maar ik vind dat het ons niet de moed moet ontnemen om toch te blijven proberen ze op te lossen. Ook van de Laatste Stelling van Fermat is wel eens geopperd dat dat misschien wel een onbeslisbaar probleem zou kunnen zijn, en dat is ook goed gekomen.

1.2.4 Diophantisch

Diophantische getaltheorie is de studie van problemen (zoals vergelijkingen en ongelijkheden) met oplossingen in uitsluitend gehele getallen. Een klassiek voorbeeld daarvan is de vraag hoe dicht bij elkaar machten van gehele getallen kunnen liggen, bijvoorbeeld hoe dicht een gehele macht van 2 en een gehele macht van 3 bij elkaar kunnen liggen.

Voor het $3n + 1$ -probleem is dit interessant, omdat, zoals we al hebben gezien, de T -functie als vermenigvuldigingsfactor bij benadering $\frac{3}{2}$ dan wel $\frac{1}{2}$ heeft. Voor een cykel, waarin K maal een oneven getal zit die tot een factor $\approx \frac{3}{2}$ leidt, en L maal een oneven getal met een factor $= \frac{1}{2}$, geldt kennelijk dat $x = T^{K+L}(x) \approx \frac{3^K}{2^{K+L}}x$, met andere woorden: $3^K \approx 2^{K+L}$.

Ray Steiner [St] was in 1977 de eerste die dit idee uitbuitte. Hij bekeek cyclen met de bijzondere eigenschap dat ze bestaan uit eerst K oneven getallen en dan L even getallen, en dan rond zijn. In zo'n geval is eenvoudig aan te tonen (Opgave!) dat het eerste oneven getal x moet voldoen aan $x = a2^K - 1$ voor een oneven a , en dan blijkt $T^K(x) = a3^K - 1$. Dan volgt $T^{K+L}(x) = \frac{a3^K - 1}{2^L}$, en dit moet weer gelijk zijn aan $x = a2^K - 1$ om de cykel rond te maken. Dit geeft een zogeheten *Diophantische vergelijking*

$$a(2^{K+L} - 3^K) = 2^L - 1,$$

die we omschrijven tot een *Diophantische ongelijkheid*

$$0 < \frac{2^{K+L}}{3^K} - 1 = \frac{2^L - 1}{a3^K} = \frac{2^L - 1}{2^L(a2^K - 1) + 1} < \frac{1}{2^K}$$

(waarbij de laatste ongelijkheid met $a \geq 1$ en een beetje gepruts volgt). Inderdaad zien we een macht van 2 en een macht van 3 die dicht bij elkaar liggen. Als we de logaritme nemen dan krijgen we, vanwege $\log(1+x) < x$ voor $x > 0$, dat

$$0 < (K+L)\log 2 - K\log 3 < \frac{2^{K+L}}{3^K} - 1 < \frac{1}{2^K}.$$

De (nogal zware) theorie van Diophantische approximaties (beter: Transcendentietheorie, op kwantitatieve poten gezet in de jaren 60 door Alan Baker) zegt dat dat helemaal niet kan. Preciezer: Georges Rhin (1987) bewees een expliciete ondergrens

$$|(K+L)\log 2 - K\log 3| > 0.00218K^{-13.3}.$$

Boven- en ondergrens vergelijken geeft nu $K \leq 96$. Vervolgens is het niet moeilijk meer om alle oplossingen te vinden, en er blijkt er maar één te zijn: $a = 1, K = 1, L = 1$.

Stelling (Steiner)

Voor de $3n+1$ -functie is de triviale cykel de enige van het even/oneven-type $oo \cdots oee \cdots e$.

Overigens moest Steiner werken met een veel slechtere ondergrens voor $|(K+L)\log 2 - K\log 3|$, die leidde tot $K < 10^{200}$. Het efficiënt afzoeken van alle oplossingen van de hierboven gegeven Diophantische ongelijkheid is, ook voor zo'n hoge bovengrens, goed mogelijk met behulp van de ket-

tingbreuk

$$\frac{\log 3}{\log 2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \dots}}}}}}},$$

waar we hier verder niet op kunnen ingaan.

Vervolgens kunnen we kijken of een dergelijk resultaat te generaliseren is tot meerdere cykel-types. Laten we een cykel een m -cykel noemen als er in totaal m overgangen van even naar oneven in zitten (en dus ook m van oneven naar even). Steiner's resultaat gaat dus over 1-cykels.

John Simons (Groningen) bewees in 2004 met een soortgelijke redenering als Steiner (maar ingewikkelder afschattingen waren nodig) dat er geen 2-cykels bestaan. Simons en ik [SdW] breidden dit in 2005–2010 uit:

Stelling (Simons en dW)

Voor de $3n + 1$ -functie is de triviale cykel de enige m -cykel met $m \leq 75$.

De afschattingen die hierbij gebruikt worden hangen af van de experimenteel bepaalde grens waarvoor het vermoeden bekend is, m.a.w. het resultaat van Oliveira e Silva. Dat betekent dat als deze rekenpartij essentieel verder gaat komen, er automatisch grotere m 's vallen. Helaas is de benodigde rekenkracht bijzonder groot. We verwachten niet dat $m = 100$ deze eeuw nog gehaald kan worden.

Door een oude (1978) elementaire afschatting van Richard Crandall [Cr] te combineren met de grens van Oliveira e Silva en de kettingbreuk van $\frac{\log 3}{\log 2}$ ver genoeg uitgerekend, kan worden aangetoond dat een eventuele niet-triviale cykel erg lang moet zijn:

Stelling (Crandall, Oliveira e Silva)

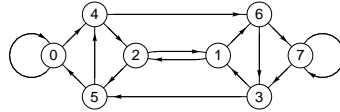
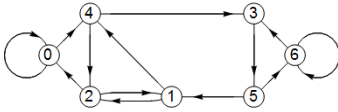
Voor de $3n + 1$ -functie heeft een niet-triviale cykel lengte $> 1.43 \times 10^9$.

Deze resultaten over cykels zijn hard. Geen vermoedens, maar keiharde bewijzen. Ze zeggen niets over het $3n + 1$ -convergentievermoeden, maar geven wel steun aan het $3n + 1$ -cykelvermoeden, in die zin dat het bestaan van een niet-triviale cykel betekent dat er dan kennelijk een zeer uitzonderlijke Diophantische gebeurtenis plaats moet vinden.

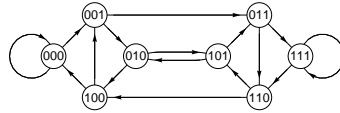
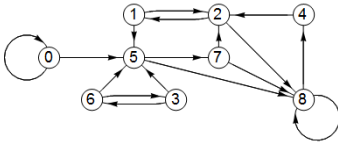
Dergelijke Diophantische resultaten zijn ook op vergelijkbare manieren te vinden voor andere $pn + q$ -functies, maar telkens slechts voor één paar (p, q) tegelijk.

1.3 De Bruijn-Grafen

Een enigszins voor de hand liggend idee is om een modulus m te kiezen, en de $3n + 1$ -functie alleen modulo m te bestuderen. Dit geeft dan eindige grafen om te bestuderen. De modulaire $3n + 1$ -graaf met modulus m bevat de punten $0, 1, 2, \dots, m - 1$, en alle mogelijke pijlen van $n \pmod{m}$ naar $T(n) \pmod{m}$. Zie Figuren 1.14, 1.15, 1.16 voor de $3n + 1$ -graaf modulo 7, 8 en 9.



Figuur 1.14: De $3n + 1$ -graaf mod 7 Figuur 1.15: De $3n + 1$ -graaf mod 8



Figuur 1.16: De $3n + 1$ -graaf mod 9

Figuur 1.17: De binaire De Bruijn-graaf op 8 punten

Dit soort grafen blijkt weinig structuur te hebben, behalve als de modulus een macht van 2 is. Als $m = 2^k$ dan is deze modulaire $3n + 1$ -graaf precies een zogeheten *binaire De Bruijn-graaf*. Deze observatie is gemaakt door Thijs Laarhoven in zijn TU/e-bachelorscriptie uit 2009. Deze De Bruijn-grafen zijn genoemd naar de bekende Eindhovense wiskundige N.G. (Dick) de Bruijn, die onlangs op hoge leeftijd overleden is. Zij ontstaan door alle getallen modulo 2^k in binaire schrijfwijze (bits) $a_0a_1 \dots a_{k-1}$ uit te drukken, en dan pijlen te zetten van $a_0a_1 \dots a_{k-1}$ naar $a_1a_2 \dots a_{k-1}0$ en $a_1a_2 \dots a_{k-1}1$, m.a.w. alle bits schuiven een positie naar links op, de eerste bit verdwijnt, en op de vrijgefallen laatste plaats komen alle mogelijkheden voor. Dit proces heet ook wel de *shiftafbeelding*.

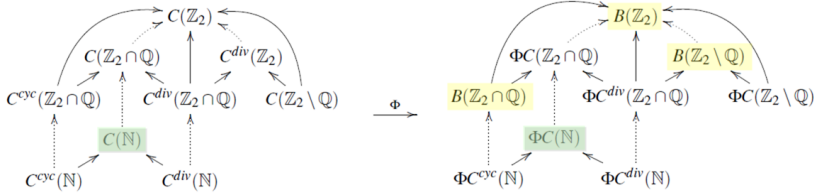
Als je bedenkt dat het $3n + 1$ -proces goed te beschrijven is vanuit de even/oneven-structuur van de baan van n , dan is in te zien dat deze modulaire $3n + 1$ -grafen inderdaad binaire De Bruijn-grafen zijn. Laten we eens kijken naar twee getallen n en n' die modulo 2^k identiek zijn. Zeg $n' = n + b2^k$. In de modulaire $3n + 1$ -graaf modulo $m = 2^k$ zitten die getallen dus op hetzelfde punt. Wat T precies gaat doen met n en n'

wordt bepaald door hun laatste bit, maar die zijn identiek. Dus ofwel n en n' zijn beide even en dan is $T(n') = n'/2 = n/2 + b2^{k-1} \equiv T(n) \pmod{2^{k-1}}$, ofwel ze zijn beide oneven en dan is $T(n') = 3n'/2 + 1/2 = 3n/2 + 3b2^{k-1} + 1/2 = T(n) + 3b2^{k-1} \equiv T(n) \pmod{2^{k-1}}$. Dit argument herhalen laat zien dat de even/oneven-structuur van de banen van n en n' inderdaad op de eerste k posities identiek zijn. Vanaf de $k + 1$ -e positie hangt het af van het even/oneven zijn van b , en die zijn beide mogelijk. Dit laat zien dat modulo 2^k de even/oneven-structuur van de baan van n precies overeenkomt met de shift-afbeelding, en dat de $3n + 1$ -graaf modulo 2^k dus precies de binaire De Bruijn-graaf is op 2^k punten.

Het aardige is nu dat voor de modulaire $pn + q$ -grafen precies hetzelfde argument opgaat. Met andere woorden, de $pn + q$ -graaf modulo 2^k is niets anders dan de binaire De Bruin-graaf op 2^k punten, *onafhankelijk van p en q* . Alleen de afbeelding van de getallen in de modulaire $pn + q$ -graaf naar de overeenkomende rijtjes bits in de De Bruijn-graaf hangt af van p en q . Deze afbeelding Φ_k heet ook wel de *conjugatie-afbeelding*, en is gegeven door $\Phi_k(n) = a_0a_1 \dots a_{k-1}$ waar a_i telkens het laatste bit van $T^i(n)$ is.

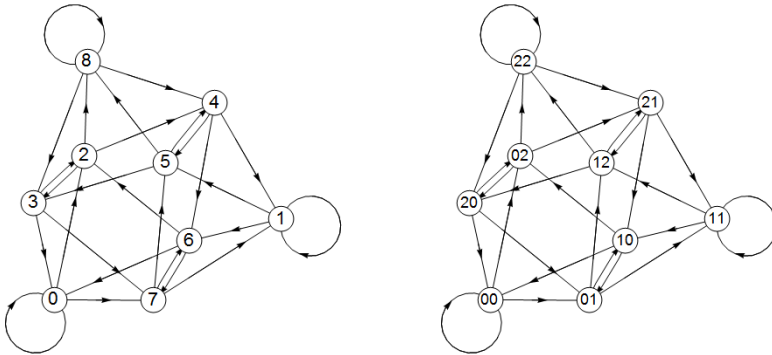
Als we k nu groter en groter nemen, dan kunnen we de overgang naar $k = \infty$ ons voorstellen door de shift-afbeelding te definiëren voor oneindige rijtjes bits: $a_0a_1a_2 \dots$ wordt afgebeeld op $a_1a_2a_3 \dots$. Met andere woorden: het meest linkse bit verdwijnt, maar aan de rechterkant valt niets aan te vullen want daar staan oneindig veel bits die allemaal een plekje naar links opschuiven. Als we al dit soort rijtjes als punten in een enorm grote graaf zetten en de pijlen in de graaf volgens de shiftafbeelding nemen, dan krijgen we de ultieme binaire De Bruijn-graaf, die wel de *2-adische De Bruijn-graaf* genoemd wordt. Ieder punt heeft twee inkomende pijlen en één uitgaande pijl. De rationale $3n + 1$ -graaf zit er compleet in (alle mogelijke cykel-componenten), en is vermoedelijk identiek met de deelgraaf uit de 2-adische De Bruijn-graaf die precies alle convergente componenten (die met cyclen) bevat. Deze 2-adische De Bruijn-graaf heeft daarnaast overaftelbaar veel componenten zonder cyclen, die er allemaal hetzelfde eruit zien: een naar twee kanten oneindig ver uitgebreide volledige binaire boom.

Kortom, het is een monsterachtig ding, maar wel goed begrepen, met bijzonder veel structuur. Alle interessante $pn + q$ -grafen zitten er ergens in verstopt. Zie Figuur 1.18. De geel gemarkeerde grafen zijn goed begrepen. De groen gemarkeerde grafen zijn de eigenlijke $pn + q$ -grafen die we zouden willen begrijpen. Voor een verdere uitleg hiervan, zie [LdW1]. De conjugatieafbeeldingen vertellen hoe precies de interessante grafen in het monster zitten. Alleen begrijpen we erg weinig van deze conjugatieafbeeldingen.



Figuur 1.18: De verschillende $pn + q$ -grafen ingebed in de 2-adische De Bruijn-graaf.

Het is bekend dat ze nergens differentieerbaar zijn. Dat helpt het begrip nou ook weer niet veel verder.



Figuur 1.19: De amusicale graaf modulo 9 Figuur 1.20: De ternaire De Bruijn-graaf op 9 punten

Als we op dezelfde modulo-manier naar de amusicale graaf kijken, dan valt al snel op dat de interessante moduli hier niet machten van 2 zijn, maar machten van 3. Zie Figuur 1.19 voor de amusicale graaf modulo 9. Er zijn nu ook De Bruijn-grafen in het spel, maar dat zijn geen binaire grafen meer, maar ternaire, omdat het gedrag van U (eigenlijk van U^{-1}) bepaald wordt door, verrassend genoeg, $n \pmod 3$. Nu kijken we dus niet meer naar bits (binair) maar naar trits (ternair, een trit is een 0, 1 of 2). Het idee van de shift-afbeelding is hetzelfde, en die beschrijft nu de modulo-3-structuur van de baan van een getal onder de U -afbeelding. Zie Figuur 1.20 voor de ternaire De Bruijn-graaf op 9 punten.

Het $3n + 1$ -vermoeden, herformulering 2:

Voor $k \rightarrow \infty$ zullen de matrices A^{2k} en A^{2k+1} convergeren naar resp. $(a_0, a_1, 0, 0, \dots)$ en $(a_1, a_0, 0, 0, \dots)$, en $a_0 + a_1 = (1, 1, 1 \dots)$.

1.4.2 Eigenruimtes

[[Deze paragraaf vooronderstelt basiskennis van eigenwaarden, eigenvectoren en eigenruimtes.]]

Merk op dat $Aa_0 = a_1$ en $Aa_1 = a_0$, dus $A(a_0 + a_1) = a_0 + a_1$ en $A(a_0 - a_1) = -(a_0 - a_1)$, dus $a_0 + a_1$ is een eigenvector bij eigenwaarde 1, en $a_0 - a_1$ is een eigenvector bij eigenwaarde -1 . Algemeen geldt: de cyclen van lengte k corresponderen elk precies met een k -tal 1-dimensionale eigenruimtes met k -e-machts eenheidswortels als eigenwaarden.

Bij iedere cykel hoort dus ook precies één 1-dimensionale eigenruimte bij eigenwaarde 1. Ook bij een divergente component hoort precies één 1-dimensionale eigenruimte, namelijk met als voortbrengende eigenvector de vector met 1-tjes op de plekken van de componenten verder nullen.

Op deze manier krijg je alle eigenvectoren bij eigenwaarde 1. Deze observatie kan als volgt geformuleerd worden:

Stelling (Engl, 1982)

De $3n + 1$ -matrix A heeft eigenwaarde 1, en de dimensie van de eigenruimte is gelijk aan het aantal componenten in de $3n + 1$ -graaf.

En dat geeft dan meteen een herformulering van het $3n + 1$ -vermoeden in termen van de dimensie van een eigenruimte:

Het $3n + 1$ -vermoeden, herformulering 3:

De $3n + 1$ -matrix A heeft bij de eigenwaarde 1 een 1-dimensionale eigenruimte.

Dit vind ik wel een heel bijzondere herformulering van het vermoeden. Helaas is de theorie van spectra van oneindige matrices niet ver genoeg ontwikkeld. De verschillende varianten van het $3n + 1$ -vermoeden die we hierboven hebben gegeven laten ook direct zien dat die theorie met veel verschillende verschijnselen rekening zal moeten kunnen houden. Voor de $5n + 1$ -matrix, die visueel sterk lijkt op de $3n + 1$ -matrix, geldt dat de dimensie van die eigenruimte vermoedelijk al oneindig is.

Het complete spectrum van A en van A^\top is inmiddels in kaart gebracht in termen van de componenten van de graaf, zie [LdW2].

1.4.3 Functionaalvergelijkingen

[[Deze paragraaf vooronderstelt basiskennis van de somnotatie $\sum_{n=0}^{\infty}$ en van complexe getallen.]]

Tenslotte: Berg en Meinardus (1994, [BM]) gaan nog een andere interessante kant op. We bekijken de machtreeks

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n z^n = e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + e_3 z^3 + \dots,$$

en we schrijven voor de coëfficiënten voor dat $e_n = e_{T(n)}$ voor alle n . De vraag is wat dat betekent voor de functie f . We definiëren

$$\begin{aligned} f_0(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_{3n} z^{3n} = e_0 + e_3 z^3 + e_6 z^6 + \dots, \\ f_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_{3n+1} z^{3n+1} = e_1 z + e_4 z^4 + e_7 z^7 + \dots, \\ f_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_{3n+2} z^{3n+2} = e_2 z^2 + e_5 z^5 + e_8 z^8 + \dots \end{aligned}$$

Laat nu $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, zodat $\omega^3 = 1$ en $\omega^2 = \bar{\omega} = -1 - \omega$. Nu is

$$\begin{aligned} f(z) &= f_0(z) + f_1(z) + f_2(z), \\ f(\omega z) &= f_0(z) + \omega f_1(z) + \bar{\omega} f_2(z), \\ f(\bar{\omega} z) &= f_0(z) + \bar{\omega} f_1(z) + \omega f_2(z), \end{aligned}$$

Met een beetje rekenwerk kunnen we f_2 nu uitdrukken in f :

$$f_2(z) = \frac{1}{3} (f(z) + \omega f(\omega z) + \bar{\omega} f(\bar{\omega} z)).$$

Nu gaan we de eis die we aan f hebben opgelegd, en die met de $3n + 1$ -

functie te maken heeft, uitbuiten:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} e_{2n+1} z^{2n+1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} e_{T(2n)} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} e_{T(2n+1)} z^{2n+1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} e_n z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} e_{3n+2} z^{2n+1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} e_n (z^2)^n + z^{-1/3} \sum_{n=0}^{\infty} e_{3n+2} (z^{2/3})^{3n+2} \\
 &= f(z^2) + z^{-1/3} f_2(z^{2/3}).
 \end{aligned}$$

En we hebben net gezien dat we f_2 kunnen terugvertalen naar f . Dat betekent dat we nu een zogenaamde functionaalvergelijking voor f hebben. Om gebroken machten van z te vermijden vervangen we z door z^3 , en de vergelijking kunnen we dan zo opschrijven:

$$3z (f(z^3) - f(z^6)) = f(z^2) + \omega f(\omega z^2) + \bar{\omega} f(\bar{\omega} z^2).$$

Deze functionaalvergelijking, die we de $3n+1$ -functionaalvergelijking noemen, is lineair. Er is direct een verband aan te geven met de $3n+1$ -graaf: bij een samenhangscomponent in die graaf hoort een functie f door $e_n = 1$ te nemen voor alle n in die component, en $e_n = 0$ voor alle n buiten die component. Twee oplossingen zijn $f(z) = 1$ (die hoort bij $n = 0$ die zijn eigen component is) en $f(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots$. Deze tweede ontstaat door de functie f bij de complete $3n+1$ -graaf te nemen.

Het verband tussen componenten in de $3n+1$ -graaf en onafhankelijke oplossingen van deze functionaalvergelijking (in machtreeksen) is weer één op één. Dit leidt meteen tot een herformulering van het $3n+1$ -vermoeden, namelijk dat er behalve de lineaire combinaties van 1 en $\frac{z}{1-z}$ geen andere oplossingen zijn, althans niet in machtreeksfuncties.

Het $3n+1$ -vermoeden, herformulering 4:

De oplossingsruimte van de $3n+1$ -functionaalvergelijking voor machtreeksfuncties f is 2-dimensionaal.

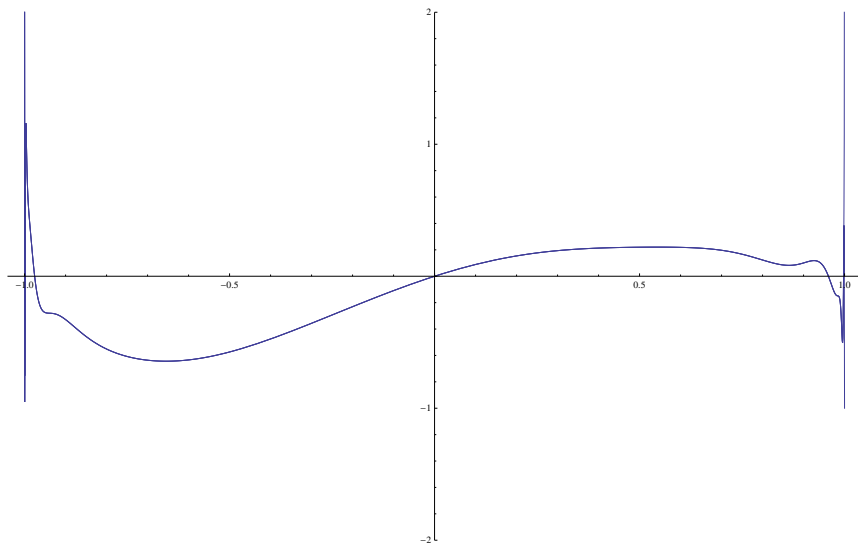
Als we de eis $e_n = e_{T(n)}$ vervangen door $e_n = -e_{T(n)}$, dan kunnen we net zoals zojuist gedaan opnieuw een functionaalvergelijking opstellen. Die verschilt slechts in een minteken:

$$3z(-f(z^3) - f(z^6)) = f(z^2) + \omega f(\omega z^2) + \bar{\omega} f(\bar{\omega} z^2).$$

Merk op dat nu geldt dat $e_n = e_{T^2(n)}$. Dit past precies op een component in de $3n + 1$ -graaf met een cykel van lengte 2. Deze vergelijking heeft dan ook een andere interessante oplossing, met $e_n = 1$ als n in een even aantal stappen op 1 uitkomt, en $e_n = -1$ als n in een oneven aantal stappen op 1 uitkomt (en $e_n = 0$ als n nooit op 1 uitkomt). Deze oplossing heeft dus de machtreeksvoorstelling

$$f(z) = z - z^2 - z^3 + z^4 + z^5 + z^6 - z^7 - \dots$$

Het zou interessant zijn deze functie beter te begrijpen. De reeks convergeert alleen op $(-1, 1)$. In Figuur 1.21 ziet u een grafiek.



Figuur 1.21: Een interessante functie die vermoedelijk alle informatie over het $3n + 1$ -vermoeden bevat.

Tenslotte doen we hetzelfde voor de amusicale permutatie. De functionaalvergelijking kan net zo als bij het $3n + 1$ -geval worden afgeleid:

$$\begin{aligned} 2z(2f(z^4) - f(z^6) - f(-z^6)) &= \\ &= (z^2 + 1)(f(z^3) - f(-z^3)) - i(z^2 - 1)(f(iz^3) - f(-iz^3)) \end{aligned}$$

(voor de doorzetters is dit een redelijke opgave).

Omdat de amusicale functie een permutatie is, zijn de convergente samenhangscomponenten (de cykels) in de amusicale graaf eindig. Dat betekent dat deze amusicale functionaalvergelijking oplossingen heeft in eindige machtreeksen. Maar dat zijn gewoon polynomen. Dat vind ik dan wel weer bijzonder, dat zo'n functionaalvergelijking plotseling blijkt polynomen als oplossingen te hebben. Omdat we vier cykels gevonden hadden, kunnen we kunnen zo een viertal polynomen opschrijven: $f(z) = z$, $f(z) = z^2 + z^3$, $f(z) = z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^9$ en, als klap op de vuurpijl:

$$f(z) = z^{44} + z^{59} + z^{62} + z^{66} + z^{70} + z^{74} + z^{79} + z^{83} + z^{93} + z^{99} + z^{105} + z^{111}.$$

Ga maar na. Het klopt echt.

Het vermoeden is dat er niet meer polynomiale oplossingen zijn dan alle mogelijke lineaire combinaties van deze vier en $f(z) = 1$. Wel zijn er andere (vermoedelijk oneindig veel onafhankelijke, vermoedelijk oneindige) machtreeksoplossingen, waarvan de eerste is

$$f(z) = z^8 + z^{10} + z^{11} + z^{12} + z^{13} + z^{15} + z^{17} + z^{18} + z^{20} + \dots$$

1.5 Conclusie

Wat zijn we nou opgeschoten met het begrijpen van het $3n+1$ -vermoeden? Eigenlijk niet zo heel veel.

We hebben een aantal argumenten er voor gezien: experimentele (flink zoeken maar met een grote batterij computers), probabilistische (getallen lijken zich volgens de wetten van de statistiek te gedragen, en die zeggen dat het vermoeden op z'n minst niet onwaarschijnlijk is), en deelresultaten (bepaalde typen cykels bestaan niet, als er niet-triviale cykels bestaan dan zijn er getallen met onwaarschijnlijke eigenschappen). We hebben geprobeerd te zien hoe de $3n+1$ -graaf ingebed ligt in een veel grotere, wel goed begrepen graaf, maar daar liepen we in vast. En we hebben interessante herformuleringen gezien in de taal van matrixproducten, van dimensies van eigenruimtes, en van dimensies van oplossingsruimten van functionaalvergelijkingen.

Het lijkt er niet op dat het bewijs van het vermoeden (of een tegenbewijs) dichterbij is gekomen. Maar het is op z'n minst interessant te noemen dat het vermoeden vertakkingen blijkt te hebben in heel verschillende deelgebieden van de wiskunde. Je weet maar nooit of er op één van die gebieden ineens een doorbraak komt. We houden dus goede hoop.

Bibliografie

- [BM] LOTHAR BERG EN GÜNTER MEINARDUS, “Functional equations connected with the Collatz problem”, *Results in Mathematics* **25** [1994], 1–12.
- [C1] JOHN H. CONWAY, “Unpredictable Iterations”, Proceedings of the Number Theory Conference (University of Colorado, Boulder, CO, 1972), pp. 49-52. Opgenomen in [L2].
- [C2] JOHN H. CONWAY, “On Unsettleable Arithmetical Problems”, *American Mathematical Monthly* **120** [2013], 192–198.
- [Cr] RICHARD E. CRANDALL, “On the $3x + 1$ problem”, *Mathematics of Computation* **32** [1978], 1281–1292.
- [E] H.W. ENGL, “An analytic representation for self-maps of a countably infinite set and its cycles”, *Aequationes Math.* **25** [1982], 90–96.
- [L1] JEFFREY C. LAGARIAS, “The $3x+1$ problem and its generalizations”, *American Mathematical Monthly* **92** [1985], 3–23, <http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/>. Opgenomen in [L2].
- [L2] JEFFREY C. LAGARIAS (ED.), *The Ultimate Challenge: The $3x + 1$ Problem*, American Mathematical Society, 2010.
- [L3] JEFFREY C. LAGARIAS, “The $3x+1$ problem: An annotated bibliography (1963–1999) (sorted by author)”, arXiv:math/0309224 [math.NT], 2011, <http://arxiv.org/abs/math/0309224v13>.
- [L4] JEFFREY C. LAGARIAS, “The $3x+1$ Problem: An Annotated Bibliography, II (2000-2009)”, arXiv:math/0608208 [math.NT], 2012, <http://arxiv.org/abs/math/0608208v6>.
- [LdW1] THIJS LAARHOVEN EN BENNE DE WEGER, “The Collatz conjecture and De Bruijn graphs”, *Indagationes Mathematicae* [2013], <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001935771300027X>.
- [LdW2] THIJS LAARHOVEN EN BENNE DE WEGER, werk in uitvoering, 2013.
- [O] GERHARD OPFER, “An analytic approach to the Collatz $3n +$

1 Problem”, Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik, Preprint 2011-09, May 2011, <http://preprint.math.uni-hamburg.de/public/papers/hbam/hbam2011-09.pdf>.

- [OS] TOMÁS OLIVEIRA E SILVA, “Empirical Verification of the $3x + 1$ and Related Conjectures”, In [L2], pp. 189–207.
- [R] ERIC ROSENDAAL, “On the $3x + 1$ Problem”, <http://www.ericr.nl/wondrous/>.
- [SdW] JOHN SIMONS AND BENNE DE WEGER, “Theoretical and computational bounds for m -cycles of the $3n + 1$ -problem”, *Acta Arithmetica* **117** [2005], 51–70. Updated version 1.44 [2010]: [http://deweger.xs4all.nl/papers/\[35a\]SidW-3n+1-v1.44\[2010\].pdf](http://deweger.xs4all.nl/papers/[35a]SidW-3n+1-v1.44[2010].pdf).
- [Sm] IONICA SMEETS, “Gênante Problemen”, in: *Wiskunde: de uitdaging*, Syllabus Vakantiecursus 2010, CWI, Amsterdam, 2010, pp. 75–82.
- [St] RAY P. STEINER, “A Theorem on the Syracuse Problem”, Proc. 7th Manitoba Conference on Numerical Mathematics 1977, Winnipeg 1978, pp. 553–559.
- [dW] BENNE DE WEGER, “Comments on Opfer’s alleged proof of the $3n + 1$ Conjecture”, <http://www.win.tue.nl/~bdeweger/downloads/opfer-comments%20v0.2.pdf>.