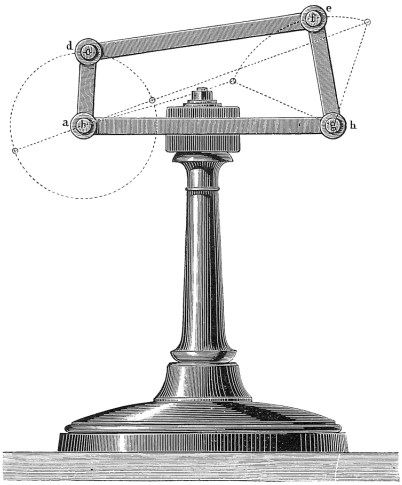
platform wiskunde nederland

Meetkunde van de stang

Syllabus Vakantiecursus 2021

Amsterdam, 27 en 28 augustus 2021

Eindhoven, 3 en 4 september 2021



platform wiskunde nederland

Meetkunde van de stang

Syllabus Vakantiecursus 2021

Amsterdam, 27 en 28 augustus 2021

Eindhoven, 3 en 4 september 2021

Programmacommissie

prof. dr. Wil Schilders (PWN, TU/e) (voorzitter)

dr. Jeroen Spandaw (TUD)

drs. Kees Temme (Gymnasium Hilversum, UVA)

dr. Benne de Weger (TU/e) (eindredactie syllabus)

e-mail: vakantiecursus@platformwiskunde.nl

Sponsoring

Deze cursus wordt mede mogelijk gemaakt door een subsidie van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO), en een bijdrage van 4TU.AMI, het toegepaste wiskunde instituut van de 3 Nederlandse technische universiteiten alsmede de universiteit van Wageningen. Organisatie vindt plaats in samenwerking met het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI), de Technische Universiteit Eindhoven (TU/e) en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Met dank aan

Ondersteuning PWN: Sjoukje Talsma.
Ondersteuning TU/e: Anita Klooster.

Platform Wiskunde Nederland
Science Park 123, 1098 XG Amsterdam
Telefoon: 020-592 4006
Website: http://www.platformwiskunde.nl

Vakantiecursus 2021

De Vakantiecursus Wiskunde voor leraren in de exacte vakken in HAVO, VWO, HBO en andere belangstellenden is een initiatief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, en wordt georganiseerd door het Platform Wiskunde Nederland. De cursus wordt sinds 1946 jaarlijks gegeven op het Centrum Wiskunde en Informatica te Amsterdam, en later ook aan de Technische Universiteit Eindhoven, vanaf 2020 bij het Academisch Genootschap Eindhoven.

Deze cursus wordt mede mogelijk gemaakt door een subsidie van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO), en een bijdrage van 4TU.AMI, het toegepaste wiskunde-instituut van de 4 Nederlandse technische universiteiten. Organisatie vindt plaats in nauwe samenwerking met het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) en de Technische Universiteit Eindhoven (TU/e).

De presentaties van de sprekers zullen zo veel mogelijk beschikbaar komen op de PWN-website: `https://www.platformwiskunde.nl`.

Docenten

Rainer Kaenders (hoofddocent)
Hausdorff Center for Mathematics
Universiteit van Bonn
Endenicher Allee 60
D - 53115 Bonn, Duitsland
e-mail: `R.Kaenders@uni-bonn.de`

Theo Jansen
`https://www.strandbeest.com/`
e-mail: `contact@strandbeest.com`

Teun Koetsier
Afdeling Wiskunde
Faculteit der Bètawetenschappen
VU Universiteit van Amsterdam
e-mail: `t.koetsier@vu.nl`

Historie

De eerste vakantiecursus wordt in het jaarverslag 1946 van het Mathematisch Centrum als volgt vermeld:

> *Op 29 en 31 Oct. '46 werd onder auspiciën van het M.C. een druk bezochte en uitstekend geslaagde vacantiecursus gehouden voor wiskundeleeraren in Nederland. Op 29 October stond de wiskunde, op 31 October de didactiek van de wiskunde op de voorgrond. De sprekers waren: Prof.Dr. O. Bottema, "De prismoide", Dr. A. Heyting, "Punten in het oneindige", Mr. J. v. IJzeren, "Abstracte Meetkunde en haar betekenis voor de Schoolmeetkunde.", Dr. H.D. Kloosterman, "Ontbinding in factoren", Dr. G. Wielenga, "Is wiskunde-onderwijs voor alpha's noodzakelijk?", Dr. J. de Groot, "Het scheppend vermogen van den wiskundige" en Dr. N.L.H. Bunt, "Moeilijkheden van leerlingen bij het beginnend onderwijs in de meetkunde".*
>
> *Aan het einde van de vacantiecursus werden diverse zaken besproken die het wiskunde-onderwijs in Nederland betroffen. Een Commissie werd ingesteld, die het M.C. over de verder te organiseren vakantiecursussen van advies zou dienen. Hierin namen zitting een vertegenwoordiger van de Inspecteurs van het V.H. en M.O. benevens vertegenwoordigers van de lerarenverenigingen Wimecos en Liwenagel.*
>
> *Ook werd naar aanleiding van "wenschen" die tijdens de cursus naar voren gekomen waren ingesteld: "een colloquium over moderne Algebra, een dispuut over de didactiek van de wiskunde, beiden hoofdzakelijk bedoeld voor de leeraren uit Amsterdam en omgeving, terwijl tevens vanwege het M.C. een cursus over Getallenleer werd toegezegd te geven door de heeren v.d. Corput en Koksma. (Colloquium, dispuut en cursus zijn in 1947 gestart en verheugen zich in blijvende belangstelling).*

75 jaar Vakantiecursus

De Vakantiecursus voor Wiskundeleraren wordt 75 jaar in 2021! Een memorabele gebeurtenis, die we niet ongemerkt voorbij willen laten gaan. Daarom zal er, naast de hoofdspreker (Rainer Kaenders) en gastspreker, ook een *speciale gast* aanwezig zijn, namelijk **Theo Jansen en zijn "strandbeesten"**.

Ook feliciteren wij het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) met hun 75-jarig bestaan. De vakantiecursus ontstond in 1946 op het CWI (toentertijd Mathematisch Centrum genaamd), en in de loop der jaren is het CWI altijd gastheer geweest van de vakantiecursus. Hiervoor nogmaals onze hartelijke dank in dit feestelijke jaar.

Programma

Vrijdag 27 augustus 2021 / 3 september 2021

15.00–15.30	*Ontvangst, koffie*
15.30–15.35	Welkomstwoord
15.35–16.20	Rainer Kaenders: Hoe teken je een rechte lijn?
16.20–16.45	*Pauze*
16.45–17:30	Rainer Kaenders: Kennismaking met stangenconstructies (Workshop)
17.30–18.30	*Diner*
18.30–19.15	Rainer Kaenders: Klassieke meetkunde van koppelkrommen
19.15–19.45	*Pauze*
19.45–20.30	Teun Koetsier: De magie van de beweging

Zaterdag 28 augustus 2021 / 4 september 2021

09.30–10.00	*Ontvangst, koffie*
10.00–10.45	Rainer Kaenders: Vernuftige constructies
10.45–11.15	*Pauze*
11.15–12.00	Rainer Kaenders: Configuraties grijpen en begrijpen (Workshop)
12.00–13.00	*Lunch*
13.00–13.45	Rainer Kaenders: Welke krommen kun je door stangen tekenen?
13.45–14.30	Speciale gast: Theo Jansen en zijn strandbeesten
14.30	Afsluiting

1 Hoe teken je een rechte lijn? Rainer Kaenders

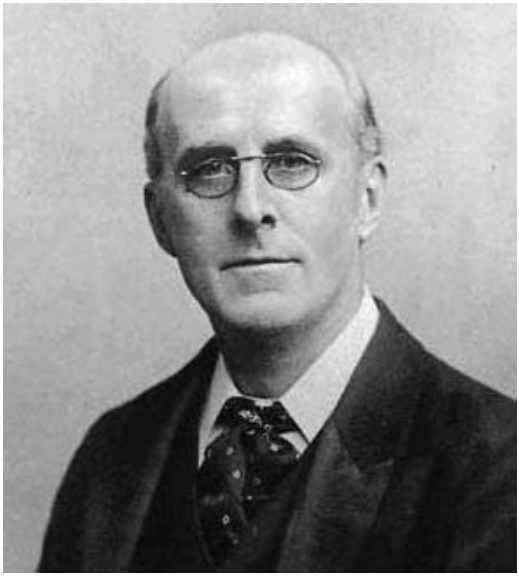
Hoe teken je een rechte lijn? Een cirkel is makkelijk met een touw of een stang te tekenen. Maar een lijn? Daarvoor heb je een liniaal nodig, maar hoe ga je dat weer construeren? In deze inleidende voordracht zal het gebied van stangenmeetkunde en hun kinematica aan de hand van basismechanismes worden voorgesteld. Daarbij leren we beroemde schijnconstructies en echte oplossingen van kinematische problemen kennen. De rechte lijn werd in het jaar 1864 door de Franse officier Charles Peaucellier (1832-1919) en onafhankelijk in 1871 door Lipman Lipkin (1840-1876), een Litauws Joodse student van Pafnuty Chebyshev[1] (1821-1894) in Sint-Petersburg gevonden en in een Belgisch tijdschrift gepubliceerd.[2]. Ook de twee oplossingen van Harry Hart (1848-1920) uit 1874 en hun veralgemenisering, de quadruplanar-inversor uit 1875 van James Joseph Sylvester (1814–1897) komen aan bod. En dan kijken we naar wat je anders met stangenconstructies nog allemaal kunt beginnen.

"How To Draw A Straight Line: A Lecture On Linkages" was de titel van een beroemd boek dat Alfred Bray Kempe (1849–1922) in het jaar 1877 publiceerde.[3] Het is een prachtig boek, waarin Kempe zijn fascinatie voor stangenconstructies uit de doeken doet. Het merendeel van de inhoud van deze eerste voordracht is in dit boek te vinden. De eerste voordracht van de vakantiecursus begint met Kempe en de laatste eindigt met hem.

[1] In de literatuur zijn er vele schrijfwijzen: Tschebyschew, Tschebyschow (Duits), Chebyshev (Engels) of Tchebychev (Frans), Čebyčev (Dirk Struik).

[2] Lipman Lipkin. *Dispositif articulé pour la transformation rigoureuse du mouvement circulaire en mouvement rectiligne.* Revue Univers. des Mines et de la Métallurgie de Lieége, 30(4):149–150, 1871. Vergelijk ook blz. 424 in: Simona-Mariana Cretu, Gigi-Dragos, Ciocioi-Troaca Emil Soarece en Eugen Marian Paun: Mechanical Models for Anti-Rhomb Linkage. In: Teun Koetsier and Marco Ceccarelli (Eds.): *Explorations in the History of Machines and Mechanisms.* Proceedings of HMM 2012, Springer Dordrecht Heidelberg New York London, 2012

[3] Herdruk verschenen bij Kessinger Publishing, 2010



Figuur 1.1: Sir Alfred Bray Kempe ($*$ 6 juli 1849, † 21 april 1922)

1.1 Wat is een stangenconstructie?

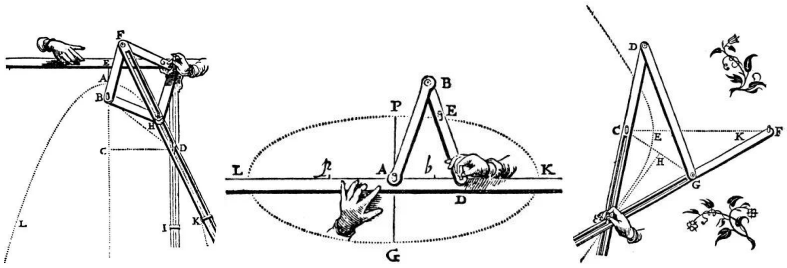
Onder een *stangenconstructie* verstaan we een eindig aantal stangen die door scharnieren aan elkaar zijn verbonden. Soms zetten we één van de stangen vast in het vlak en laten alle stangen ten opzichte van dat vlak bewegen. Af en toe nemen we de stangenconstructie ook in de hand en beschouwen ze als zodanig.

Of we verbinden een pen met een vaste plek op onze stangenconstructie in het vlak en terwijl wij die constructie bewegen, tekent die pen een figuur. Dat kan een deel van het vlak, een kromme of een verzameling van enkele punten zijn.

Sommige constructies zien er op het eerste gezicht uit als een stangenconstructie maar zijn het niet in de stricte zin die we hier willen hanteren. Bijvoorbeeld heeft Frans van Schooten (1615–1660)[4] een aantal passer-constructies voor parabool, ellips en hyperbool gemaakt zoals zij in figuur 1.2 zijn afgebeeld.

Dit zijn echter geen stangenconstructies omdat vaste stangenpunten langs andere stangen heen schuiven.

[4] Schooten, Frans van, Mathematische oeffeningen: begrepen in vijf boecken. Amsterdam: Gerrit van Goedesbergh, 1659-60



Figuur 1.2: Constructies van kegelsneden door “paraboolpasser”, “ellipspasser” en “hyperboolpasser”

Ook de constructie[5] van Robert C. Yates in figuur 1.3 is niet een stangenconstructie in de strenge zin. Beide constructies bestaan uit een *contra-parallellogram*, zoals Kempe dit noemde. Soms vind men ook de benaming *anti-parallellogram*. Minder formeel spreken we ook van een *vlinderconstructie*. Het snijpunt P van AD en BC bij de constructie links tekent een ellips en het snijpunt P van BA en DC bij de constructie rechts tekent een hyperbool. Je kunt ook makkelijk inzien, dat als AB in het plaatje links en BC rechts vast aan het vlak verbonden zijn, er twee ellipsen of twee hyperbolen op elkaar afrollen. Het punt P van de pen is echter niet vast met een stang van de constructie verbonden – daarom is het geen stangenconstructie in de boven geformuleerde zin.

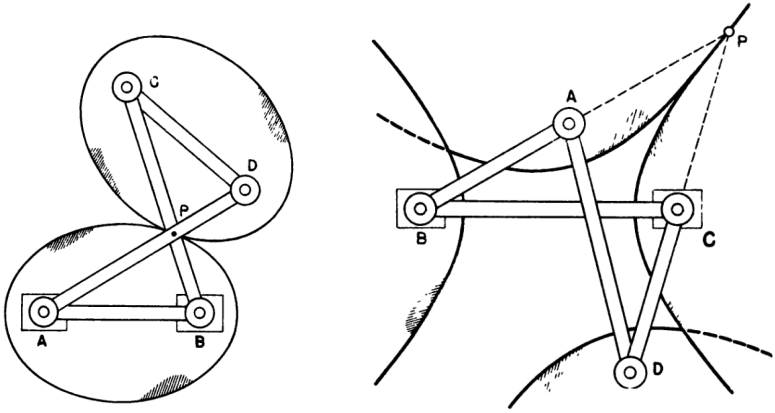
Ook al zijn dit allemaal als zodanig geen stangenconstructies zo zullen we toch later leren hoe je er stangenconstructies van kunt maken.

1.2 Tevergeefse pogingen voor een rechte lijn

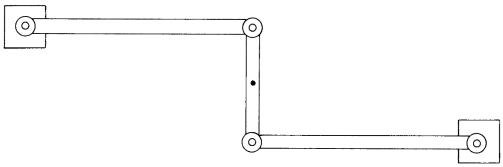
Volgens de legende was het de befaamde James Watt (1736-1819) die het probleem formuleerde om met een stangenconstructie een rechte lijn te tekenen. Dit probleem leek lastiger dan verwacht. Uiteindelijk werd een oplossing voor een stangenmechanisme met een rechtgeleiding gegeven door Charles Nicolas Peaucellier en Yom Tov Lipman Lipkin, student van Pafnuty Lvovich Chebyshev – ook bekend door zijn ongelijkheid in de kansrekening.[6]

[5] Blz. 183 in Robert C. Yates (1974). *Curves and Their Properties.* Classics in Mathematics Education A Series, Volume 4, National Council for Teachers of Mathematics.

[6] Vergelijk: Simona-Mariana Cretu, Gigi-Dragos, Ciocioi-Troaca Emil Soarece en Eugen Marian Paun: Mechanical Models for Anti-Rhomb Linkage. In: Teun Koetsier and Marco Ceccarelli (Eds.): *Explorations in the History of Machines and Mechanisms.* Proceedings of HMM 2012,



Figuur 1.3: Constructies voor ellips en hyperbool door schuivende snijpunten uit het boek *Curves and Their Properties* van Robert C. Yates



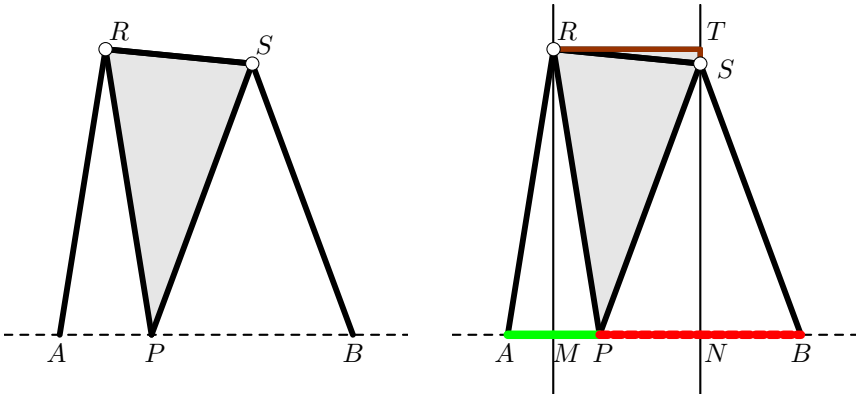
Figuur 1.4: James Watts pseudo-oplossing voor het rechte lijn probleem: "Watt's parallel motion" uit het boek van Kempe

Maar voordat het zover was, bestonden er al een aantal pseudo-oplossingen van het probleem. Een van deze pseudo-oplossingen was de stangenconstructie van James Watt zelf (zie figuur 1.4), die ook in de voordracht van Teun Koetsier een rol gaat spelen.

Een ander voorbeeld van een dergelijk mechanisme is *Roberts' linkage*, vernoemd naar Richard Roberts (1789–1864) – zie figuur 1.5.

De constructie bestaat uit een stangenvierzijde $ABSR$, waarbij A en B vast aan het vlak verbonden zijn en er een vaste driehoek $\triangle PSR$ aan RS is vastgemaakt en star met RS meebeweegt. In de constructie van Roberts is $|AB| = 2|RS|$ en $|AP| = |RP| = |SP| = |SB|$. Natuurlijk is het mogelijk drie punten op de door

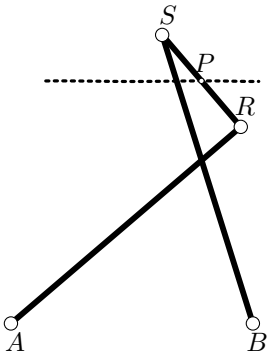
Springer Dordrecht Heidelberg New York London, 2012.



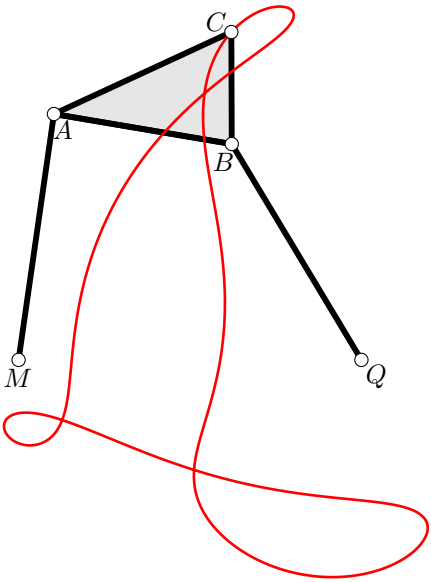
Figuur 1.5: Stangenconstructie van Richard Roberts

het punt P getekende kromme te berekenen en vast testellen dat ze niet op een lijn liggen. Meetkundig kunnen we dit ook door een argument inzien. Stel dat P op de lijn AB zou liggen. Dan tekenen we de symmmetrieassen MR en NS van de altijd gelijkbenige driehoeken APR en PBS en zenken de loodlijn door R af op lijn NS met snijpunt T. We zien dat $|MN| = |RT|$ wat in tegenspraak staat met $|AB| = 2|RS|$ omdat $|RT| < |RS|$.

Andere nepoplossingen van het rechte-lijn-probleem komen van Chebyshev. Hij studeerde en ontwikkelde 39 jaar lang zulke bijna-rechte-lijn-tekenconstructies. Wij zullen er nu één van leren kennen en later een tweede.
De zoektocht naar zulke bijna-rechte-lijn oplossingen heeft bij Chebyshev geleid tot een ontdekking, die onafhankelijk van hem ook al door Roberts werd gedaan.



Alle voorgestelde bijna-rechte-lijn oplossingen van Watt, Chebyshev en Roberts zijn voorbeelden van zogenaamde *koppelkrommen*, die we in de volgende voordracht preciezer gaan studeren. Een derglijke constructie bestaat uit een stangenvierzijde $MQBA$, waarbij M en Q vast aan het vlak verbonden zijn en er een vaste driehoek $\triangle ABC$ aan AB is vastgemaakt en star met AB meebeweegt. Deze driehoek kan ook ontaard zijn, d.w.z. dat C ook op de lijn AB mag liggen.

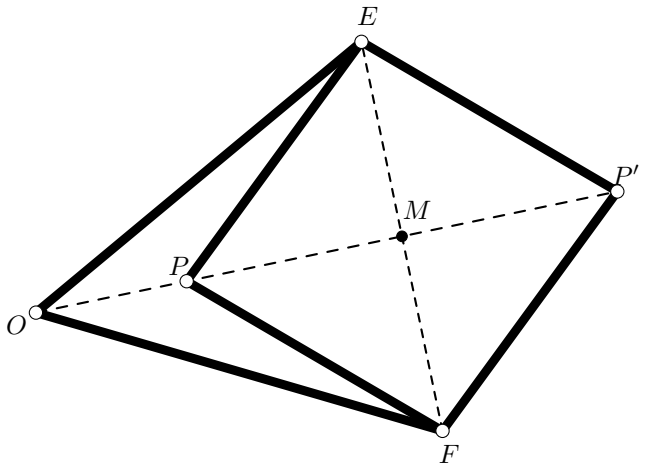


Figuur 1.6: Een voorbeeld van een koppelkromme

De aan het vlak verbonden stang MQ heet *pivotstang*, de stang AB noemen we *koppelstang* en de door punt C getekende kromme, d.w.z. de meetkundige plaats van alle punten in het vlak, die door C bereikbaar zijn, heet *koppelkromme* met stangenvierzijde $MQBA$, pivotstang MQ en vaste driehoek $\triangle ABC$ – zie figuur 1.5. Al met al spreken we van een *koppelmechanisme*.

1.3 Een rechte lijn tekenen

Charles Nicolas Peaucellier en Yom Tov Lipman Lipkin vonden wat we tegenwoordig de Peaucellier-Lipkin stangenconstructie noemen. Deze maakt gebruik van een basisconstructie, waarmee de spiegeling aan een cirkel kan worden gerealiseerd. Het is de volgende constructie. We nemen een stangenvierzijde $PFP'E$ met vier even lange stangen van lengte $b := |PE| = |EP'| = |P'F| = |FO|$ (een stangen*ruit*) en verbinden twee tegenoverliggende hoekpunten E en F met twee even lange stangen van lengte $a := |OE|$, die langer zijn dan de stangen van de stangenruit. De andere einden van deze twee stangen fixeren we in een vast punt O in het vlak.



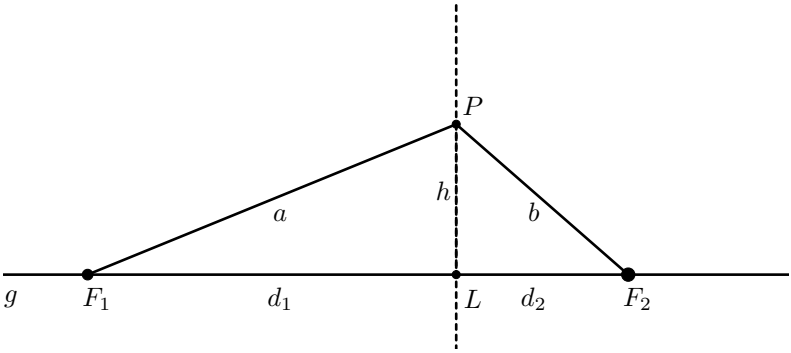
Figuur 1.7: Een Peaucellier-Lipkin inversor

Als nu P vastgelegd is, dan is ook P' vast gelegd. De bewering is nu dat $|OP| \cdot |OP'|$ voor elke positie van P een constant getal is. Hiervoor gebruiken we het volgende eenvoudige maar dikwijls handige lemma.

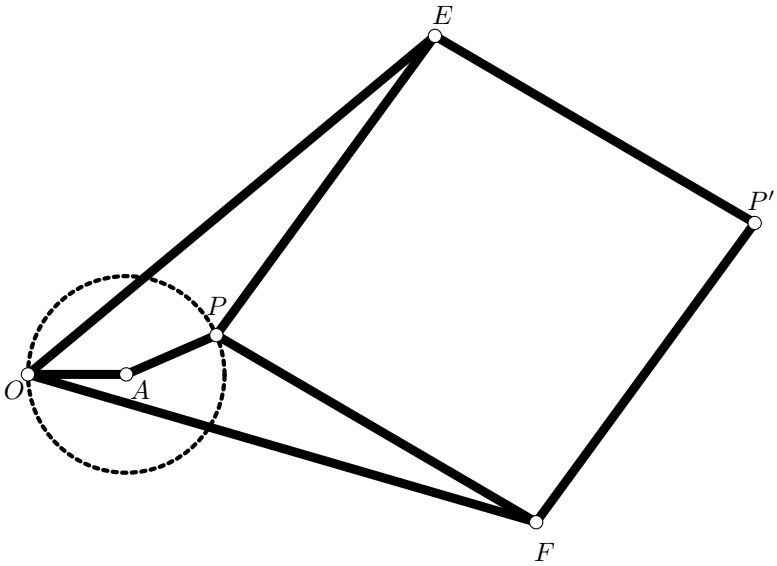
Lemma 1.3.1. *Gegeven twee punten F_1 en F_2 en een derde punt L op een rechte lijn g. Wij noemen m de op g loodrechte lijn door L. Dan geldt:*

$$P \text{ ligt op } m \quad \Leftrightarrow \quad |PF_1|^2 - |PF_2|^2 = |LF_1|^2 - |LF_2|^2.$$

Bewijs. Wij noemen $a := |PF_1|$ en $b := |PF_2|$ en $d_1 := |LF_1|$ en $d_2 := |LF_2|$.



Er geldt: $a^2 = d_1^2 + h^2$ en $b^2 = d_2^2 + h^2$ waaruit volgt $a^2 - b^2 = d_1^2 + d_2^2$. □



Figuur 1.8: Een Peaucellier-Lipkin stangenconstructie voor een rechte lijn

Kempe noemt de vorm OFE een *pijlpunt* en de vorm $OFP'E$ een *vlieger* en concludeert dat $|OP| \cdot |OP'|$ constant en gelijk aan $|OF|^2 - |PF|^2$ is.

Stelling 1.3.2. *Bij de Peaucellier-Lipkin inversor zijn de punten P en P' elkaars gespiegelden aan de cirkel met straal $\sqrt{a^2 - b^2}$ rond het punt O.*

Bewijs. Noem $r := |OP|$ en $R := |OP'|$. Het boven aangetoonde Lemma 1.3.1 levert: $a^2 - b^2 = \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 - \left(\frac{R-r}{2}\right)^2 = R \cdot r$. □

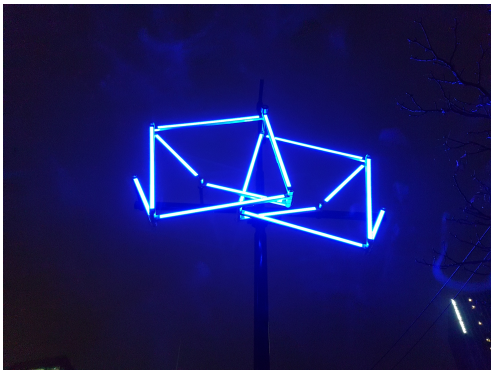
De cirkelinversie aan de cirkel rond O met de straal $\sqrt{a^2 - b^2}$ beeldt een cirkel, die door O verloopt, af op een rechte lijn (zie de workshop hierna). Een dergelijke cirkel kunnen we maken als we het punt P dwingen op een cirkel met straal a rond een punt A te lopen wiens afstand naar O precies a bedraagt. En dat is precies wat het Peaucellier-Lipkin mechanisme doet. Daarmee is bewezen, dat de Peaucellier-Lipkin constructie inderdaad een rechte lijn kan tekenen.

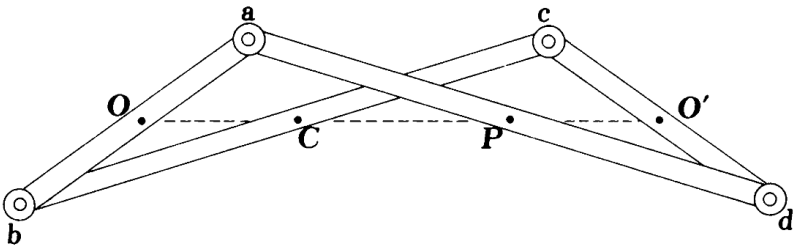
Figuur 1.9: “Just because you are a character, doesn’t mean you have character”

Stelling 1.3.3. *Bij de Peaucellier-Lipkin constructie doorloopt het punt P een lijnstuk, dat op een rechte lijn ligt.*

Opmerking: De Eindhovense kunstenaar Ivo Schoofs heeft een groot beeld tot stand gebracht, waarin de Peaucellier-Lipkin stangenconstructie ingebouwd is:

het beeld “Just because you are a character, doesn’t mean you have character”, 2016, 22m x 15m x 16m, 6600kg (zie Figuur 1.9). Op zijn homepage `https://ivoschoofs.com/` tref je een leuke video aan waarin hij erover vertelt hoe het beeld is ontstaan. Bij deze vakantiecursus zal hij in Eindhoven aanwezig en aanspreekbaar zijn.



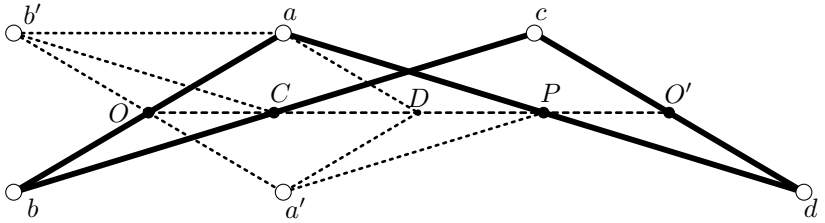


Figuur 1.10: De inversor van Harry Hart – uit *How to draw a straight line?*

Een alternatieve aanpak voor de constructie van een rechte lijn is de *Hart inversor* vernoemd naar Harry Hart (1848–1920) en gevonden in het jaar 1874.[7] Hij gebruikt maar vier stangen in plaats van zes bij Peaucellier-Lipkin inversor. Wij ontdekken ook hier een *contra-parallellogram*. Voor het volgende nemen we de notatie over uit figuur 1.10.

Stelling 1.3.4. *Bij de Hart inversor zijn de punten C en P elkaars gespiegelden aan de cirkel met straal $\sqrt{a^2 - b^2}$ rond het punt O.*

Bewijs. De driehoeken $\triangle bcd$ en $\triangle bad$ zijn congruent en hebben dus even grote hoeken en dezelfde hoogte op bd. Bovendien hebben ze dezelfde middenparallel evenwijdig aan bd. De punten $OCPO'$ liggen dus op een lijn s.



Als we driehoek $\triangle OPa$ en de driehoek $\triangle OCb$ aan s spiegelen, zo dat a op een punt a' en b op een punt b' terecht komt, dan zien we – net als bij Peaucellier-Lipkin – een pijlpunt $bCb'O$ en een vlieger $Oa'Pa$ ontstaan. Nu schuiven we het pijlpunt $bCb'O$ naar rechts, zodat C op P terecht komt.

[7] Hart H.: *On Certain Conversions of Motion.* In: Messenger of Mathematics. N. S. vol. 4 (1875), blz. 82-88, 97-100. en Hart H.: *A Parallel Motion.* In: Proceedings of the London Mathematical Society. vol. 6 (1874-1875), blz. 137-139.

Wij hebben dus dezelfde situatie als bij Peaucellier-Lipkin. Het is

$$|PD| \cdot |PO| = |OC| \cdot |OP| = |Pa|^2 - |Oa|^2.$$

Deze term rechts is constant en daarmee is aangetoond, dat de constructie van Hart een inversor is. □

2 Kennismaking met stangenconstructies (Workshop) Rainer Kaenders

Na de inleiding wordt het tijd om zelf aan de slag gaan. Het doel van deze workshop is tweeledig. Eenerzijds willen we de mechanismes van pantograaf en plagiograaf onderzoeken en ten tweede gaan we enkele achtergronden beter begrijpen. Voor het eerste maken we gebruik van materialen uit het boek van Mareike Mink "Geometrie entdecken in technischen Anwendungen – Lernumgebungen für MINT-Unterricht mit Alltagsbezug".[1]

2.1 Panto- en plagiograaf

Opgave: (Pantograaaf)

Knip één van de vier kartonnen pantografensetjes A/B/C/D uit. Delen 1, 2, 3, 4 behoren tot de basisopbouw van de pantograaf. Delen 5 en 6 dienen ervoor om daarmee preciezer te kunnen tekenen. Pons gaatjes bij de kleine cirkeltjes voor splitpennen en pons telkens één gaatje bij A4/B4/C4/D4 voor een penpunt.

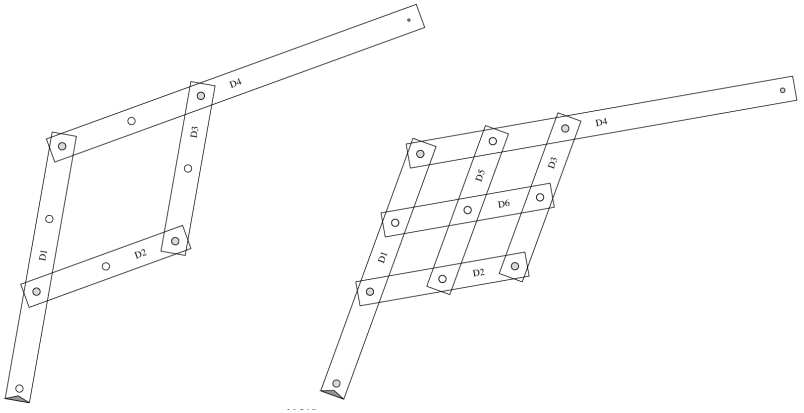
Hint: Maak de gaatjes, zo mogelijk, niet groter dan voor de splitpennen of het penpunt nodig. Anders wordt de tekening niet precies.

Zet nu de pantograaf volgens de bouwplaat in figuur 2.1 met splitpennen in elkaar. Als je de constructie nog uitbouwt, zoals in figuur 2.1 rechts, wordt je tekening preciezer.

Maak hiervoor de stangen 5 en 6 met vijf verdere splitpennen vast en verwijder de splitpen, die 2 en 3 verbindt. Als je dan beweegt blijven de gaatjes waar 2 en 3 verbonden waren alsnog op elkaar. (Hoe komt dat?)

Neem nu de sjabloon met de driehoek en de cirkel en punten Z_1 en Z_2 erop en pons bij deze telkens een gaatje voor een splitpen. Maak nu het vrije einde van

[1] Mareike Mink (2018). *Geometrie entdecken in technischen Anwendungen – Lernumgebungen für MINT-Unterricht mit Alltagsbezug.* Springer-Spektrum.



Figuur 2.1: Bouwplaten voor pantografen (uit het boek van Mareike Mink)

A1/B1/C1/D1 (dat met een grijze driehek is gemarkeerd) met een splitpen aan Z_1 vast en zet er een pen in het kleine daarvoor voorziene gaatje aan het vrije einde van A4/B4/C4/D4.

Teken nu met de pantograaf als volgt:

1. Beweeg de pen zodanig, dat het middelpunt van de gaatjes, waar A2/B2/C2/D2 en A3/B3/C3/D3 samenkomen, de rand van de cirkel zo precies mogelijk langs gaat (als je hiervoor de pen verwijdert, kun je beter zien). Wat verkrijg je daarbij?

   Hint: probeer het eerst even zonder pen en probeer uit hoe de pantograaf überhaupt beweegt.

2. Denk er nu over na wat je krijgt als je hetzelfde met de driehoek doorvoert. Ga nu dezelfde oefening voor de driehoek doen, die je al voor de cirkel hebt gedaan.

3. Welke resultaten vermoed je voor het geval dat de pantograaf bij Z_2 (in plaats van Z_1) wordt vastgemaakt? Zet nu de pantograaf bij Z_2 vast en ga nu nogmaals langs beide figuren.

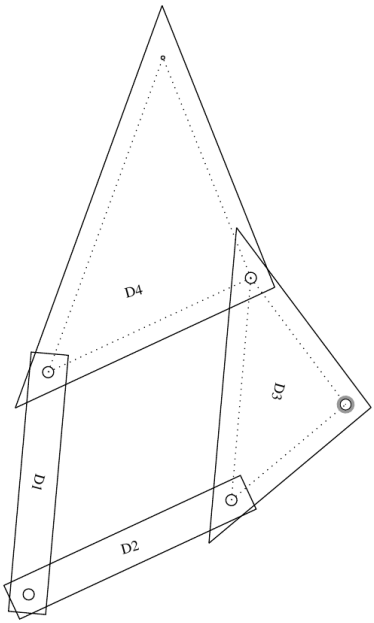
4. Vergelijk jullie resulaten met verschillende pantografen in de groep. Wat hebben het gegeven figuur en het beeldfiguur met elkaar gemeen? Waar zijn ze verschillend? Hoe beïnvloedt de gekozen pantograaf het resultaat? Welke afmetingen of lengteverhoudigen speelen hier een rol? Welke niet? Welke moeilijkheden zijn er ontstaan?

5. Maak nu zelf een verdere sjabloontekening met een zelf gekozen vast punt Z_3, die jullie dan met de verschillende pantografen overdragen. Waar moet je hier allemaal op letten?

6. Kun je het verschijnsel van de pantograaf uitleggen?

Opgave: (Plagiograaaf)

Knip één van de vier bouwsetjes A/B/C/D uit karton voor de plagiograaf uit. Pons kleine gaatjes bij de kleine cirkeltjes voor splitpennen en respectievelijk telkens eentje bij A4/B4/C4/D4 voor een penpunt.
Zet nu de plagiograaf volgens de bouwplaat hier rechts met vier splitpennen in elkaar. Let erop dat het vrije einde van A3/B3/C3/D3 resp. A4/B4/C4/D4 datgene is, wat met een grijze ring oftewel met een kleinere gaatje voor het penpunt is gemarkeerd.
Om nu de bijzondere eigenschappen van de plagiograaf te kunnen ontdekken, heb je weer een sjabloon nodig – deze keer die met cirkel, driehoek en een enkel punt Z. Maak hier een klein gaatje voor een splitpen en zet er de splitpen in, die de stangen 1 en 2 met elkaar verbindt. Zet nu een pen in het vrije gaatje bij A4/B4/C4/D4.

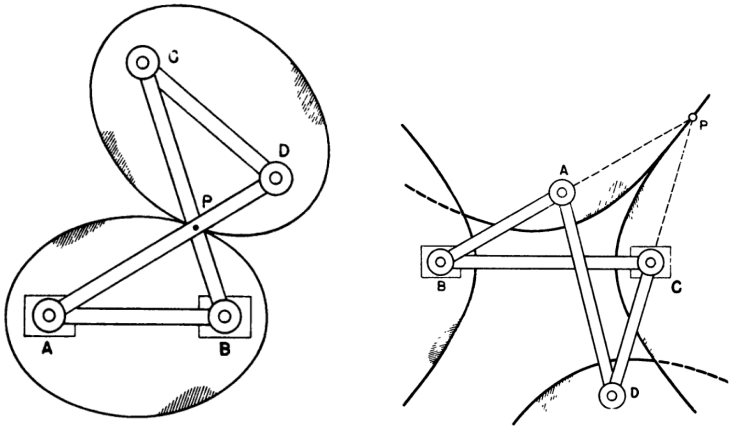


Teken nu met de plagiograaf op de volgende manier.

1. Beweeg de pen zo, dat het middelpunt van een gaatje aan een vrij einde A3/B3/C3/D3 de cirkelrand zo precies mogelijk langs gaat. Welk resultaat krijg je dan?

2. Denk erover na, wat je verkrijgt als je hetzelfde voor een driehoek doet? Herhaal het tekenproces voor de driehoek.

3. Vergelijk in de groep de resultaten voor de verschillende plagiografen. Wat hebben de figuur op de sjabloon en de beeldfiguur gemeen? Waar zijn ze verschillend? Hoe beïnvloedt de gekozen plagiograaf het resultaat? Welke



Figuur 2.2: Constructies voor ellips en hyperbool door schuivende snijpunten van Robert C. Yates

afmetingen of lengteverhoudigen spelen hier een rol? Welke niet? Welke moeilijkheden zijn er ontstaan?

4. Maak nu zelf een verdere sjabloontekening met een zelf gekozen vast punt Z', die jullie dan met de verschillende pantografen overdragen. Waar moet je hier allemaal op letten?
5. Hoe verklein je met een plagiograaf? Om welke hoek wordt gedraaid?
6. Kun je wellicht het verschijnsel van de plagiograaf uitleggen?

2.2 Enkele opmerkingen over stangenconstructies

Opgave: (Ellips en hyperbool)

De constructies[2] van Robert C. Yates in figuur 2.2 zijn geen stangenconstructie in de strenge zin. Deze constructies berusten beiden op een *contra-parallellogram*. Bewijs nu...

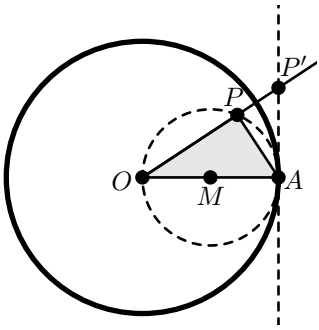
[2] Blz. 183 in Robert C. Yates (1974). *Curves and Their Properties.* Classics in Mathematics Education A Series, Volume 4, National Council for Teachers of Mathematics.

Figuur 2.3: Een mechanisme voor de verdubbeling van hoeken

1. Het snijpunt P van AD en BC bij de constructie links tekent een ellips, d.w.z. dat $|PA| + |PB|$ is constant voor alle standen van het mechanisme, en het snijpunt P van BA en DC bij de constructie rechts tekent een hyperbool, d.w.z. dat $||PA| + |PB||$ is constant voor alle standen van het mechanisme.
2. Kun je ook zien, dat als de AB links en BC rechts vast aan het vlak verbonden zijn, er twee ellipsen of twee hyperbolen op elkaar afrollen?

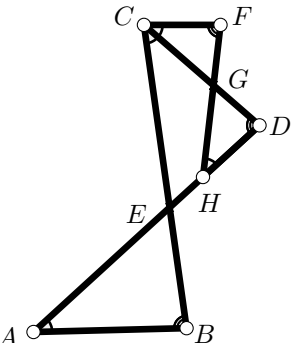
Opgave: (Cirkelinversie)

1. Laat meetkundig zien dat een cirkel, die door het middelpunt van de spiegelcirkel gaat en deze raakt, op een lijn wordt afgebeeld.
2. Gebruik een centrische strekking om in te zien dat elke cirkel door het middelpunt van de reflectiecirkel op een rechte lijn wordt afgebeeld.



Opgave: (Verdubbeling van hoeken)

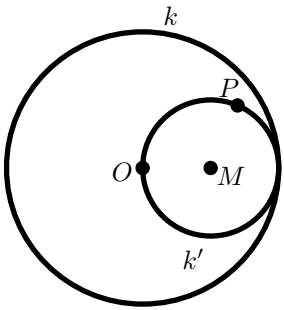
Gegeven is een contra-parallellogram van stangen $ABCD$ mit $|AB| = |CD|$ en $|BC| = |AD|$, zodat twee zijden elkaar in een punt E snijden. Eraan vast gehangen zit een tweede contra-parallellogram $HDCF$, zo dat $|FH| = |CD| = |AB|$ en H op AD ligt.
Laat zien, hoe je met dit mechanisme bij een gegeven hoek een twee keer zo grote hoek kunt maken.



Opgave: (Tusi paar)

Een *Tusi paar* is een paar van cirkels k en k' met stralen r en r', zo dat $r = 2r'$. De cirkel k is vast en k' draait van binnen op de rand van k. Daarbij laten we een punt P zijn baan tekenen.

1. Onderzoek de baan van P en bewijs je vermoeden.
2. Gebruik het dubbele contraparallellogram uit de vorige opgave om vanuit het Tusi paar constructie een stangenconstructie te realiseren, die een lijn tekent.



3 Klassieke meetkunde van koppelkrommen
Rainer Kaenders

Deze voordracht houdt zich bezig met een belangrijke grote klasse van krommen. Het zijn de zogenaamde *koppelkrommen*. In toepassingen spelen deze krommen een belangrijke rol. In figuur 3.1 zie je een voorbeeld van een lemniscaatkraan[1] – een voorbeeld van een koppelmechanisme.[2] In de jaren vijftig vervaardigden Hrones en Nelson een indrukwekkende atlas met ongeveer 10.000 koppelkrommen: een waar monnikenwerk.[3]

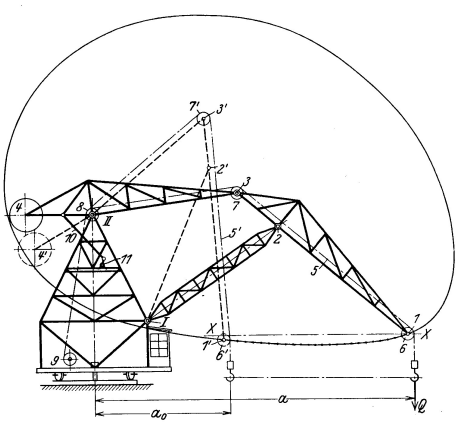


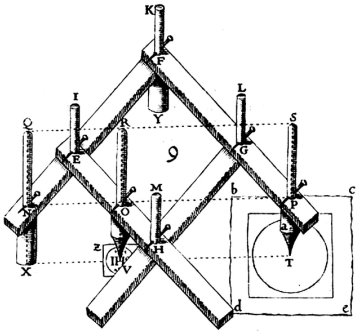
Abb. 882. Einziehdrehkran mit Lemniskatenlenker. (Demag.)
1—2—3 Ausleger; *I—2, II—3* Lenker; *4* Auslegergegengewicht; *5* Hubseil; *6* Auslegerrolle; *7—8* Umlenkrollen zu *5*; *9* Hubtrommel; *10* Zugstangen, den angetriebenen Lenker mit den Kurbeln *11* des Einziehwerks verbindend; *1—1'* benutztes Stück der Lemniskate.

Figuur 3.1: Kraan met koppelkromme (lemniscaatsturing)

[1] Uit: R.Hänchen (1932). *Winden und Krane, Aufbau, Berechnung und Konstruktion*. Verlag Julius Springer, Berlin.

[2] Meer informatie is te vinden in: R. Kaenders (2007). *Lemniscaten en Kranen.* Nieuw Archief voor Wiskunde, 5de serie, deel 8, nr.2. (112-118).

[3] J.A. Hrones, G.L. Nelson (1951). *A*nalysis of the Four-Bar Linkage, I and II, The Technology Press of M.I.T. and John Wiley & Sons.

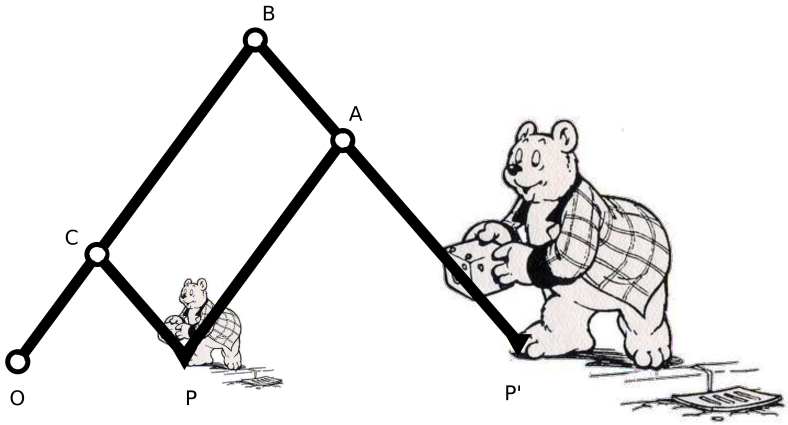


Figuur 3.2: De pantograaf van Christoph Scheiner (1573–1650)

3.1 Panto- en plagiografen

Een bekende stangenconstructie is die van een *pantograaf*, die al in het begin van de 17e eeuw bekendheid had.[4] Het is een gereedschap om tekeningen uit te vergroten zoals in figuur 3.2 aangeduidt.

Een *pantograaf* is een stangenconstructie, die bestaat uit een parallellogram PA BC, waarbij de zijden CB en AB op een dergelijke manier verlengd zijn dat minstens in één stand O, P en P' op een lijn liggen. Het mechanisme wordt met het punt O aan het vlak verbonden.



[4] Scheiner, C.: Pantographice seu Ars delineandi res quaslibet per parallelogrammum lineare seu cavum, Rome, 1631.

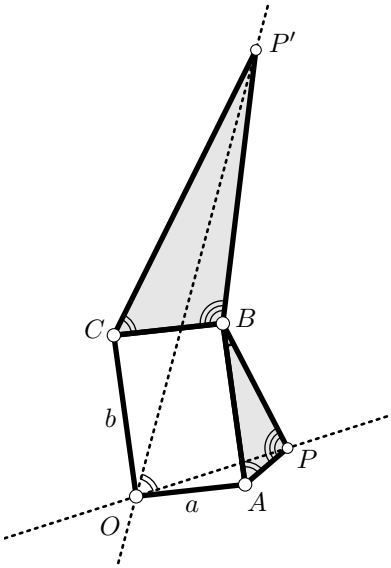
Stelling 3.1.1. *Gegeven een pantograaf zoals hier boven beschreven. Dan geldt voor elke stand dat O, P en P' op een lijn liggen. En verder geldt voor het vaste getal $\lambda = \frac{|OB|}{|OC|}$ en elke stand van P, dat*

$$|OP'| = \lambda |OP|.$$

Bewijs. Het bewijs maakt gebruik van de gelijkvormigheid van driehoeken en is deel van de workshop. □

Een veel minder bekende veralgemenisering van de pantograaf is de zogenaamde plagiograaf.

Een *plagiograaf* is een stangenconstructie bestaande uit een parallellogram $OABC$, waarbij O aan het vlak is vastgemaakt, en driehoken $\triangle APB$ en $\triangle CBP'$ met punten P en P', die vast aan de zijden AB en BC zijn verbonden. De driehoeken $\triangle APB$ en $\triangle CBP'$ zijn gelijkvormig en op dezelfde manier geörienteerd, zodat $\measuredangle PAB = \measuredangle BCP'$ is. Deze hoek nomen we θ.
De plagiograaf wordt ook in het book van Kempe beschreven en hij vertelt (blz. 26-28) dat het gaat om een uitvinding van James Joseph Sylvester (1814–1897), die het *Plagiograph* of *Skew Pantagraph* noemde.



Stelling 3.1.2. *Gegeven een plagiograaf met parallellogram $OABC$, waarbij O aan het vlak is vastgemaakt, met driehoeken $\triangle APB$ en $\triangle CBP'$ als ook een hoek $\theta = \measuredangle PAB = \measuredangle BCP'$. Daarbij nomen we $b := |AB|$ en $c := |AP|$.*

Overal waar een punt P door deze constructie op een P' wordt afgebeeld, gaat het om een draaistrekking met strekfactor $\frac{b}{c}$ rond het punt O en draaihoek θ.

Bewijs. De hoeken $\measuredangle OCP'$ en $\measuredangle OCP'$ zijn gelijk omdat $\measuredangle OCB$ en $\measuredangle BAO$ gelijk zijn. Verder zijn $|AP| = \frac{a}{b}|CP'|$ en $|CP'| = \frac{b}{a}|AB|$. Dus is $|AP| : |CP'| = a : b$. Hierdoor zijn ook de driehoeken $\triangle OP'C$ en $\triangle OAP$ omgekeerd

geörienteerd gelijkvormig. De gelijkvormigheid van $\triangle APB$ en $\triangle CBP'$ impliceert $\frac{|AP|}{b} = \frac{a}{|CP'|}$. Het is dus een strekking met een strekfactor van $\lambda = \frac{|AB|}{|AP|}$, d.w.z. de verhouding van de benen van de hoek θ, waarvan we nu laten zien dat het de draaihoek is.

Noem $\alpha := \measuredangle AOP = \measuredangle CP'O$ als ook $\beta := \measuredangle OPA = \measuredangle COB$. De twee hoeken van het parallellogram $\varphi = \measuredangle OCB$ en $\psi = \measuredangle AOC$ voldoen aan $\pi = \varphi + \psi$. Hierdoor vinden we voor de draaihoek

$$\theta = \psi - \alpha - \beta = \pi - \varphi - \alpha - \beta = \measuredangle PAB = \measuredangle BCP'.$$

□

De door deze stelling gegeven afbeelding kan op een unieke manier op het hele vlak worden uitgebreid tot de draaistrekking rond O met draaihoek θ en strekfactor λ, die we Φ_O noemen. Omdat een dergelijke afbeelding Φ een gelijkvormigheidsafbeelding is, geldt in het bijzonder dat zij lijnen op lijnen en cirkels met hun middelpunten op cirkels met hun middelpunten afbeeldt.

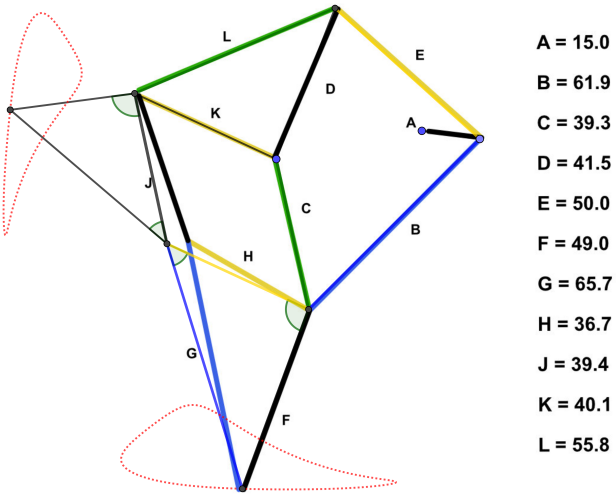
Opmerking: Ook de loopconstructie van Theo Jansen, "The Legsystem. Invented in 1991, a system based on the thirteen holy numbers." in figuur 3.3 geeft aanleiding voor een plagiograaf in een koppelmechanisme – althans als wij de schijnbare parallellogram tot een echte parallellogram maken. Maar de loopbaan van de voet is daardoor wel aanzienlijk slechter.

3.2 Koppelkrommen en pivotcirkel

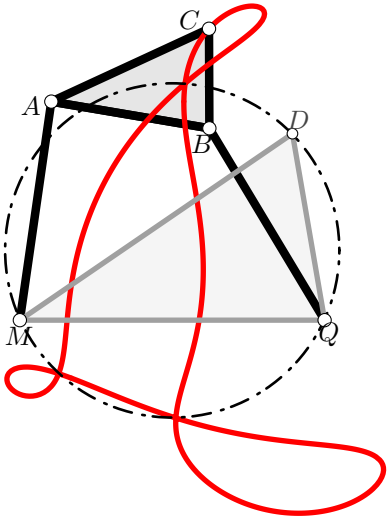
De zoektocht naar zulke bijna-rechte-lijn oplossingen heeft bij Roberts en Chebychev geleid tot een ontdekking, die zij onafhankelijk van elkaar vonden.

Alle voorgestelde bijna-rechte-lijn oplossingen van Watt, Chebychev en Roberts zijn voorbeelden van zogenaamde *koppelkrommen*.

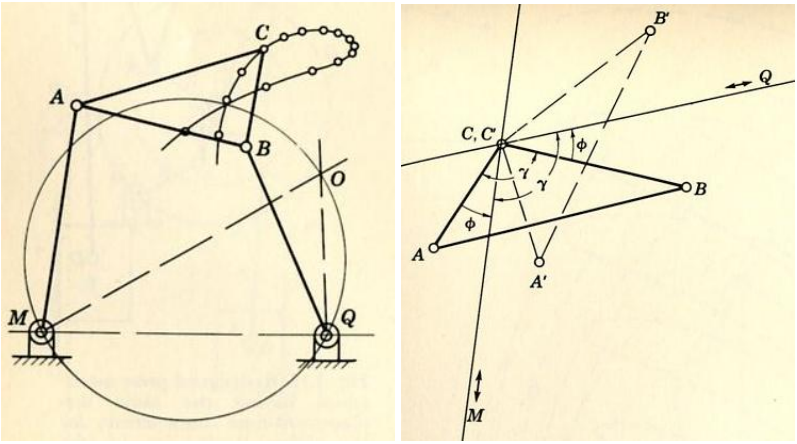
Zoals in de eerste voordracht reeds beschreven bestaat de constructie van een *koppelkromme* uit een stangenvierzijde $MQBA$, waarbij M en Q vast aan het vlak verbonden zijn en er een vaste driehoek $\triangle ABC$ aan AB is vastgemaakt en star met AB meebeweegt. Deze driehoek kan ook ontaard zijn, d.w.z. dat C ook op de lijn AB kan liggen. De aan het vlak verbonden stang MQ heet *pivotstang*, de stang AB noemen we *koppelstang* en de door punt C getekende kromme, d.w.z. de meetkundige plaats van alle punten in het vlak, die door C bereikbaar zijn, heet *koppelkromme* van het *koppelmechanisme* met stangenvier-



Figuur 3.3: Licht veranderd benenstelsel van Theo Jansens strandbeesten met een geplagiografeerde (maar minder optimale) loopbaan



Figuur 3.4: Een koppelkromme en haar pivotcirkel



Figuur 3.5: Definitie van een pivotcirkel en bewijsschets bij Stelling 3.2.1 (uit het boek van A.S. Hall)

zijde $MQBA$, pivotstang[5] MQ en vaste driehoek $\triangle ABC$.

Een verrassend inzicht over koppelkrommen is de ligging van de dubbelpunten van een dergelijke kromme. Bij een gegeven koppelkromme kies je een punt D zodat de driehoeken $\triangle MQD$ en $\triangle ABC$ gelijkvormig zijn. De omcirkel van $\triangle MQD$ heet de *pivotcirkel* van de koppelkrommenconstructie.

In het boek van A.S. Hall[6] en in vele andere werken vinden we de stelling:

Stelling 3.2.1. *Bij een koppelkromme liggen alle dubbelpunten op de pivotcirkel.*

Bewijs. Stel dat er een dubbelpunt op de pivotcirkel ligt. Dan zijn er twee posities van de driehoek aan de koppelstang: $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$ waarbij $C = C'$. Het vaste punt M moet nu ergens op de deellijn liggen van $\angle ACA'$. Evenzo moet Q op de deellijn liggen van $\angle BCB'$. Hieruit volgt dat $\angle MCQ$ óf gelijk is aan $\angle ACB$ óf aan het supplement $180° - \angle ACB$. Als wij nu bij gegeven M en Q kijken naar de meetkundige plaats van alle punten S waarvoor $\angle MCQ$ óf gelijk is aan $\angle ACB$ óf aan het supplement van $\angle ACB$, dan vinden wij de pivotcirkel. Deze constructie kan moeiteloos worden omgedraaid om te bewijzen dat bij een punt van de koppelkromme op de pivotcirkel twee verschillende driehoeken en daarmee een dubbelpunt behoort. □

[5]Het Franse woord 'pivot' betekent zoiets als 'draaipunt'. In een koppelmechanisme zoals in figuur 3.5 zijn er de punten M en Q mee bedoeld.

[6]A.S. Hall (1961). *Kinematics and Linkage Design*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J

3.3 Koppelkrommen en hun verwanten

Koppelkrommen zijn delen van algebraische krommen van graad zes[7], d.w.z. dat er een veelterm $\Phi(x, y)$ in twee variablen van graad zes bestaat, zo dat alle punten $P = (x, y)$ op de koppelkromme voldoen aan $\Phi(x, y) = 0$. Wellicht is dit interessante informatie, maar speelt voor ons hier op het moment verder geen rol.

Alleen met elementaire meetkunde bewezen Roberts en Chebychev over zulke koppelkrommen onafhankelijk van elkaar de volgende verrassende stelling.[8]

Stelling 3.3.1. ***Roberts-Chebychev Theorema:*** *Voor een gegeven koppelkromme bestaan er drie koppelmechanismes, die deze koppelkromme voortbrengen.*

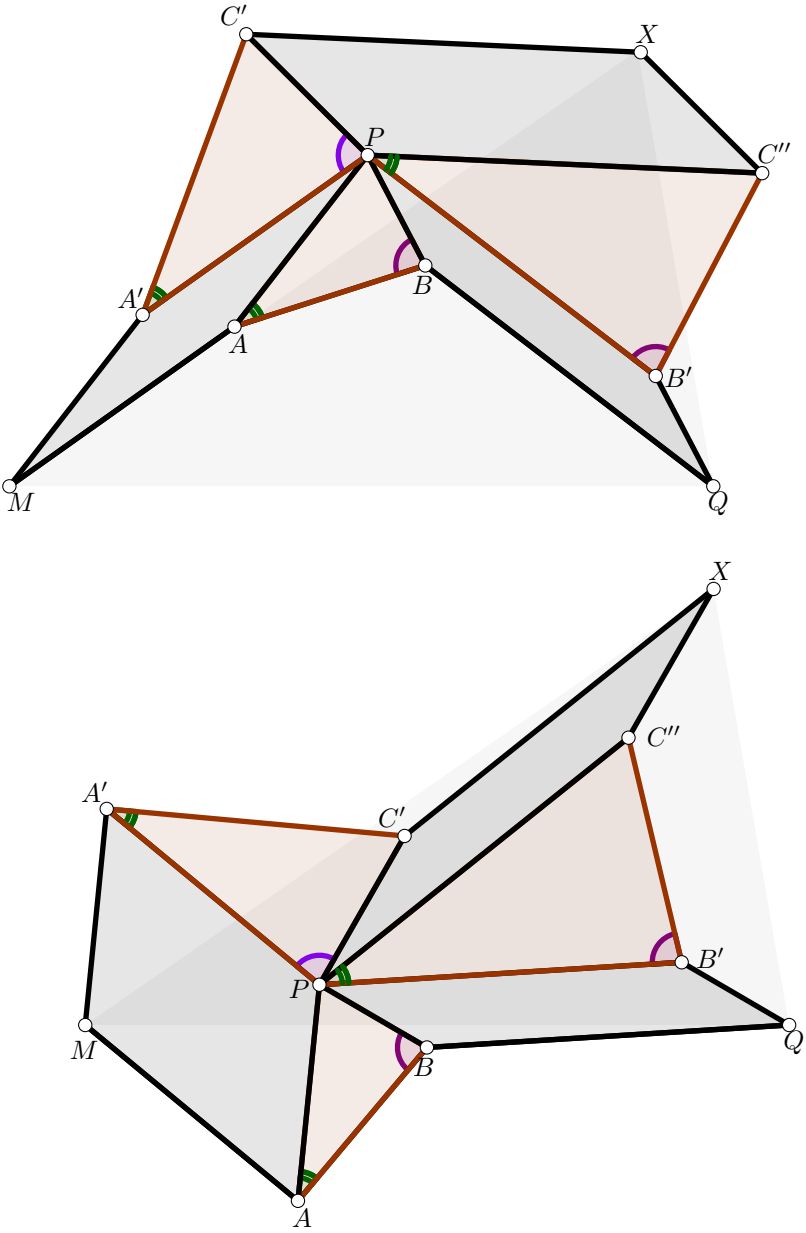
Deze drie koppelmechanismes worden *verwant* ("cognate") genoemd. Voor het bewijs is essentieel dat er in deze constructie uiteindelijk een drietal plagiografen zitten. Wij kijken eerst naar de plagiografen met vast punt in M en in Q. Er is telkens een parallellogram met een hoekpunt in M respectievelijk Q en de driehoeken zijn dan juist die twee van de drie driehoeken, die allemaal gelijkvormig zijn met $\triangle ABP$ en aan dat parallellogram grenzen. Wij noemen $a := |BP|$, $b := |AP|$ en $c := |AB|$. Voor M en Q hebben we dus

- ...de plagiograaf met centrum M. De bijbehorende afbeelding Φ_M is een draaistrekking met draaihoek $\alpha := \measuredangle AMA'$ en strekfactor $\lambda_M = \frac{c}{a}$ en beeldt B af op C',
- ...de plagiograaf met centrum Q. De bijbehorende afbeelding Φ_Q is een draaistrekking met draaihoek $\beta := \measuredangle AMA'$ en strekfactor $\lambda_M = \frac{c}{a}$ en beeldt A af op C.

Bewijs. Voor het bewijs karakteriseren we het punt X als een vast punt. Nu laten we voor een moment de stangen $C'X$ $C''X$ uit de constructie weg omdat noch Φ_M noch Φ_Q deze stangen benodigen. Dan merken we op dat Φ_M het punt Q afbeeldt op een punt X, waarvoor geldt dat $\measuredangle QMX = \alpha$ en $|XM| = \frac{b}{c}$. Tegelijkertijd geldt ook dat Φ_Q het punt M afbeeldt op een punt X', waarvoor geldt dat

[7] Zie blz. 152-154 in: Beyer, Rudolf (1953). Kinematische Getriebesynthese – Grundlagen einer quantitativen Getriebelehre ebener Getriebe. Springer. Verlag Berlin: Göttingen-Heidelberg

[8] Vergelijk: Egbert Verstraten: Cognate Linkages the Roberts – Chebyshev Theorem. In: Teun Koetsier and Marco Ceccarelli (Eds.): *Explorations in the History of Machines and Mechanisms.* Proceedings of HMM 2012, Springer Dordrecht Heidelberg New York London, 2012. of zie ook Uicker, John J.; Pennock, Gordon R.; Shigley, Joseph E. (2003). *Theory of Machines and Mechanisms.* Oxford University Press.



Figuur 3.6: Een koppelmechanisme heeft drie verwante koppelmechanismes.

$\measuredangle XQM = \beta$ en $|XQ| = \frac{a}{c}$. Zowel X als ook X' zijn hierdoor gekarakteriseerd. Op grond van gelijkvormigheid geldt $X = X'$.

De lengtes a, b en c als ook de lengtes $|MA|$ en $|QB|$ bepalen via gelijkvormigheid alle verdere lengtes van de constructie. Hieruit volgt $|PC''| = \frac{b}{c}|QB|$ en $|PC'| = \frac{a}{c}|QB|$.

Nu beeldt Φ_M de cirkel rond Q met straal $|QB|$ af op de cirkel rond X met straal $|XC'|$. En in het bijzonder wordt B op C' op deze cirkel afgebeeld. Dus is $|C'X| = \frac{b}{c}|QB| = |PC''|$.

Φ_Q beeldt de cirkel rond M met straal $|MA|$ af op de cirkel rond X met straal $|XC''|$. En in het bijzonder wordt A op C'' op deze cirkel afgebeeld. Dus is $|C''X| = \frac{a}{c}|QB| = |PC'|$.

Daarmee is $PC''XC'$ een parallellogram en X is het eerder geconstrueerde punt. Dit punt blijft dus vast staan als de rest bewegt. □

Nu dat we weten, dat bij elk koppelmechanisme twee verwante koppelmechanismes horen, die dezelde koppelkromme voortbrengen, zou je kunnen denken, dat je bij elk van deze koppelmechanismes de pivotcirkel kunt tekenen en zodoende de dubbelpunten op de snijpunten van deze cirkels moeten liggen. Bij nader inzien echter zien we dat bij elk van de drie koppelmechanismes de pivotcirkel dezelfde is: het is altijd de omcirkel om de driehoek $\triangle MQX$.

In de volgende voordracht komt deze stelling ook voor en morgen bestuderen we de gevolgen van deze stelling.

4 De magie van de beweging
De historische context van de stangenmeetkunde
Teun Koetsier

4.1 De Industriële Revolutie

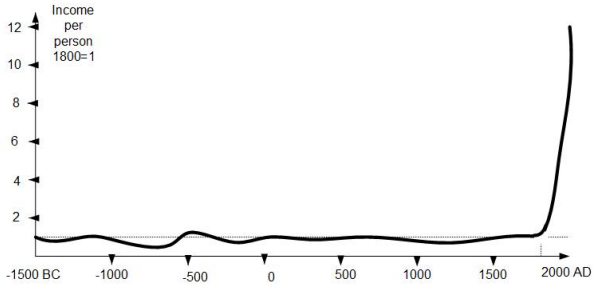
In de 18e eeuw gebeurde er in Engeland iets bijzonders. Vanaf de Steentijd tot in die eeuw was er sprake geweest van geleidelijke maatschappelijke vooruitgang. Er waren periodes van terugval, maar wetenschap en technologie ontwikkelden zich. Toch nam het bruto nationaal product, de totale toegevoegde waarde van alle goederen en diensten die in een land werden geproduceerd, per hoofd der bevolking nooit echt toe. Men spreekt wel van de "Val van Malthus". Technologische vooruitgang in de landbouw leidde regelmatig tot grotere productie, maar omdat tegelijk de bevolking groeide nam per capita het nationaal product niet toe.

In de 18e eeuw in Engeland ontsnapte de mensheid uit de Val van Malthus: vanaf de tweede helft van de 18e eeuw tot op de dag van vandaag steeg in de landen waar de industriële ontwikkeling plaats vond het nationaal product per capita spectaculair.

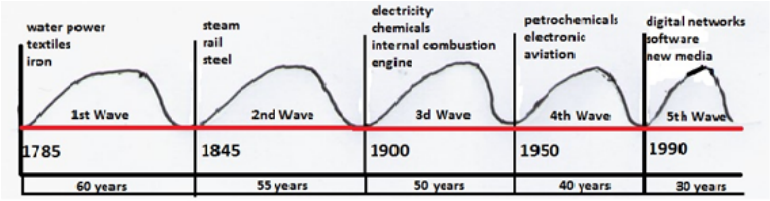
Wat gebeurde in de 18e eeuw in Engeland? Met de Industriële Revolutie kwam het hele maatschappelijke systeem in Engeland in een stroomversnelling. Bij de productie, maar ook bij het transport en de distributie ging alles sneller. Goederen begonnen te bewegen "faster than the winds themselves"(Benoger, 1986), p. 219.

In de economische ontwikkeling vanaf de 18e eeuw laat zich een golfpatroon onderscheiden. In de eerste golf domineerde de textielindustrie. In de tweede golf was dat de spoorwegindustrie. Elektriciteit en de interne verbrandingsmotor zijn onder meer bepalend in de derde golf. Zie Figuur 4.2.

We beperken ons tot de eerste twee golven. Het sleutelwoord is mechanisering. In de eerste golf werden spinnen en weven gemechaniseerd. Het bleek mogelijk om die technieken, die grote handigheid en oefening vereisten, door machines te laten verrichten. En als die machines op de juiste manier werden aangedreven



Figuur 4.1: Ruwe schets van de ontwikkeling van het nationaal product per capita (Clark, 2007).



Figuur 4.2: De Kondratieff-golven (Economist, 1999).

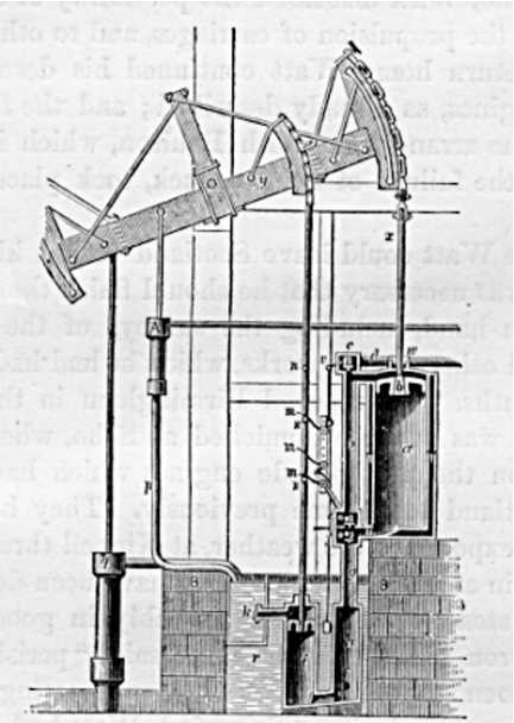
– eerst met waterkracht en later door stoommachines – nam de snelheid van het productieproces zeer toe. Bij de tweede golf gaat het om het transport van mensen en goederen: in het bijzonder met de trein.

De 19e eeuw is de eeuw van de traditionele machine: uit grote ten opzichte van elkaar bewegende ijzeren onderdelen bestaande apparaten. Die machines bestaan uit mechanismen. We zullen nu eerst kijken naar twee mechanismen uit de praktijk en vervolgens naar de theorie die daarmee samenhangt.

4.2 Watts rechtgeleiding

James Watt, aanvankelijk instrumentmaker aan de universiteit van Glasgow, werkte vanaf 1763 van de 18e eeuw aan stoommachines. Zie Figuur 4.3 voor een van zijn vroege machines. Vòòr Watt liet men de stoom in de cilinder condenseren.

Watt introduceerde een aparte condensator in een koud waterbad onder de cilin-

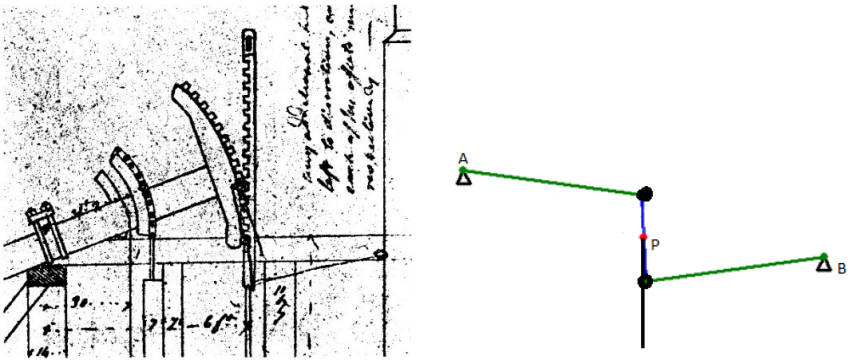


Figuur 4.3: Een van de eerste stoommachines van Watt.

der. Als de zuiger in de hoogste stand stond ging onderaan in de cilinder een klep open en condenseerde de stoom in de condensator. Het gecondenseerde water werd weggepompt. Dat betekende minder warmteverlies. Watt verbeterde de machine ook op andere punten.

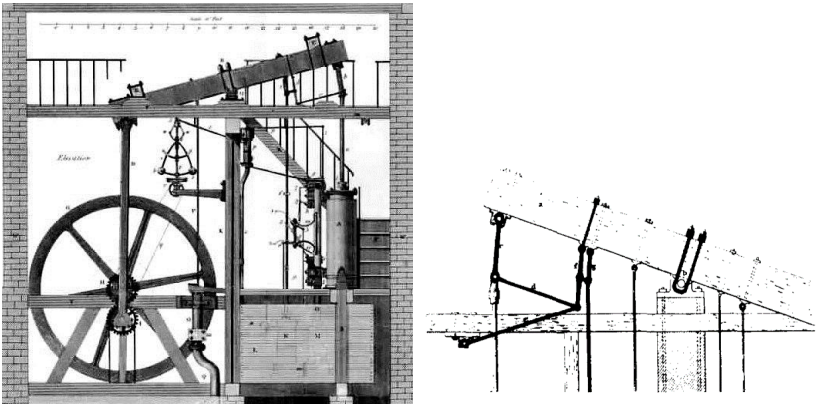
De wijze waarop de op en neer gaande beweging van de zuigerstang omgezet werd in een heen en weer gaande beweging van de balans bevredigde hem niet. En toen had hij een idee. Zie Figuur 4.4.

Twee stangen scharnieren om vaste punten. Hun uiteinden zijn scharnierend verbonden door een koppelstang. Het midden van de koppelstang kan dan vrijwel recht op en neer gaan. Watt schreef op 30 juni 1784 aan zijn partner Boulton: ”I have started a new hare. I have got a glimpse of a method of causing a piston-rod to move up and down perpendicularly, by only fixing it to a piece of iron upon the beam, without chains, or perpendicular guides, or untowardly frictions, arch



Figuur 4.4: De rechtgeleiding van Watt in simpele vorm.

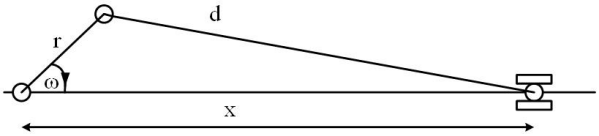
heads, or other pieces of clumsiness" (Muirhead, 1854), p. 191.


Figuur 4.5: Het parallellogram van Watt.

Watt paste het mechanism meteen toe. Op 21 oktober 1784 schreef hij "The new central perpendicular motion answers beyond expectation, and does not make the shadow of a noise" (Muirhead, 1854), p. 202. Weldra maakte Watt het mechanisme compacter door gebruik te maken van het principe van de pantograaf. Overal verschenen na verloop van tijd deze van Watts parallellogram voorziene stoommachines. Ze waren groot en maakten ook grote indruk. De Fransman François Arago schreef:. "At each double oscillation it unfolds itself and closes itself, with the softness, I would almost say with the grace that fascinates us in the gestures of an accomplished actor" (Arago, 1854), p. 426.

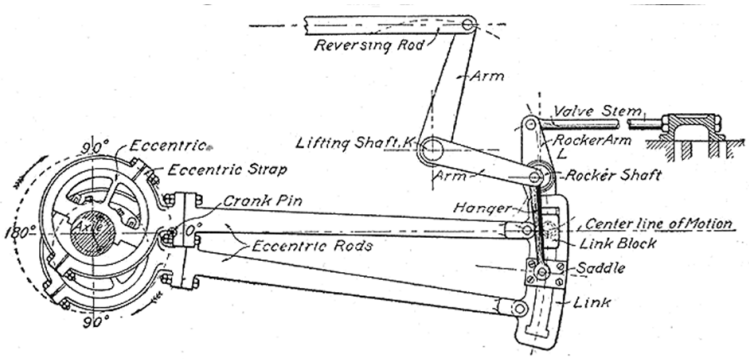
4.3 Het omkeermechanisme of de schaar van Stephenson

In de 30er jaren van de 19e eeuw worstelden de ingenieurs Howe en Williams van het bedrijf Robert Stephenson & Co met het volgende probleem met betrekking tot een locomotief. De cilinder lag horizontaal en dreef de wielen aan met een kruk-sleuf mechanisme. Zie Figuur 4.6.



Figuur 4.6: Kruk-sleuf mechanisme.

Een stoomschuif heen en weer schuivend bovenop de cilinder regelde de inlaat en de uitlaat van de stoom. Dat gebeurde ook met een kruk-sleuf mechanisme waarvan de kruk wordt gerealiseerd met een 'excentriek'. De kwestie was dat men de locomotief ook achteruit wilde laten rijden. Dat kan als men de stoomschuif iets achter laat lopen. Verschillende onbevredigende oplossingen waren gesuggereerd totdat Howe en Williams met een slimme oplossing met twee excentrieken kwamen. Zie Figuur 4.7.



Figuur 4.7: Een versie van het omkeermechanisme van Stephenson. Met de arm kan het element met de sleuf er in (vaak 'coulisse' genaamd) omhoog worden getrokken. Dan gaat de andere excentriek de schuif aandrijven.

De excentrieken zijn verbonden met een stang met een gleuf erin, die 'coulisse'

Figuur 4.8: Locomotief met schaar van Stephenson. Bron: Tony Hisgett, `https://en.wikipedia.org/wiki/Stephenson_valve_gear`.

heet en door de machinist met een hendel op en neer kan worden getrokken. De stand van de coulisse bepaalt welke excentriek actief is.

4.4 Wetenschappelijke technologie

Het is opvallend dat in de 19e eeuw de belangrijke uitvindingen in de praktijk werden gedaan en de wetenschap zoals die beoefend werd aan bijvoorbeeld de polytechnische scholen op het continent daarbij meestal geen rol speelde. Dat veranderde geleidelijk en pas echt in de 20e eeuw.

Die polytechnische scholen hielden zich overigens wel met machines bezig. Het is opvallend dat een machine vaak werd gezien als een apparaat dat beweging transformeert. Een stoommachine, bijvoorbeeld, heeft een cilinder met daarin een zuiger. Die zuiger gaat heen en weer en het is de kunst om die heen en weer gaande beweging om te zetten in het voor een specifiek doel gewenste bewegingspatroon. Als je zo naar machines kijkt dan moet een wetenschap van de machine zich bezig houden met alle mogelijke manieren waarop beweging kan worden getransformeerd.

Rond 1830 realiseerde de Fransman Ampère zich dat er inmiddels allerlei stukken meetkundige theorie waren die beweging betroffen maar zonder daar massa's

of krachten bij te betrekken. Hij introduceerde daarvoor het woord kinematica (cinématique). Dat woord werd onmiddellijk geaccepteerd. Het is zinvol om daarbij onderscheid te maken tussen theoretische kinematica (betreft algemene eigenschappen) en de kinematica van mechanismen (betreft specifieke mechanismen).

Vele artikelen en boeken werden in de 19e eeuw aan de kinematica gewijd. De praktijk stimuleerde de theorie en nauwelijks omgekeerd. Toepassingen van de theorie volgden meestal pas in de 20e eeuw.

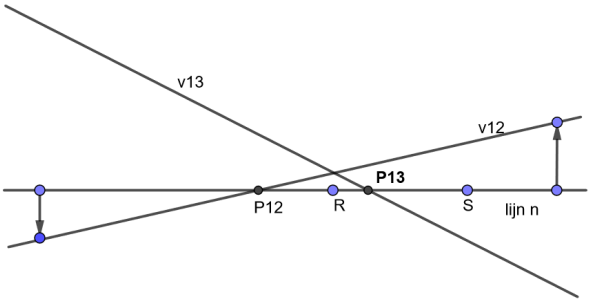
4.5 Vlakke theoretische kinematica en de kinematica van mechanismen

In de vlakke theoretische kinematica bestudeert men met elkaar samenvallende Euclidische vlakken die ten opzichte van elkaar bewegen. Een van de vlakken wordt meestal als vast beschouwd. In de instantane kinematica kijkt men naar de beweging op één bepaald moment. Een simpele fundamentele stelling is deze: "De beweging van twee met elkaar samenvallende vlakken is instantaan een translatie of een rotatie om een instantaan rotatiecentrum". Dat instantaan rotatiecentrum heet ook wel de pool. Een tweede mooie stelling is: "Bij twee ten opzichte van elkaar bewegende vlakken beschrijft het instantaan rotatiecentrum zowel in het vaste vlak als in het bewegende vlak een kromme, de vaste en de bewegende polode, respectievelijk. Tijdens de beweging rolt de bewegende polode zuiver op de vaste polode." Daarbij wordt ervan uitgegaan dat de beweging wordt gedefinieerd door nette differentieerbare functies.

Een stelling die we nog zullen gebruiken is de Stelling van Aronhold-Kennedy: Als drie samenvallende vlakken ten opzichte van elkaar bewegen, dan liggen op elk moment de drie rotatiecentra op één lijn (Aronhold, 1872) en (Kennedy, 1887).

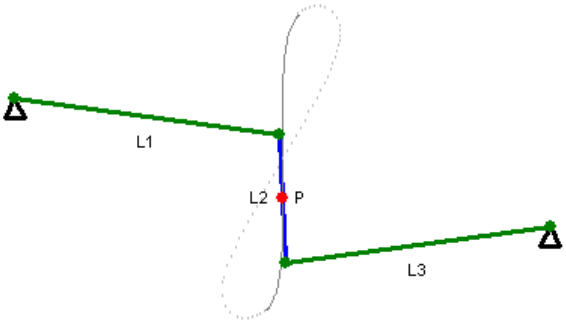
De juistheid van de stelling is snel in te zien. Laat 1 het vaste vlak zijn en 2 en 3 de bewegende vlakken. Lijn n is de verbindingslijn van de polen P_{12} en P_{13}. De eindpunten van de snelheidsvectoren van de punten van n in vlak 2 liggen op de lijn v_{12}. De eindpunten van de snelheidsvectoren van de punten van n in vlak 3 liggen op de lijn v_{13}. Nu zijn er twee punten R en S op n die ten opzichte van vlak 1 gelijke snelheid hebben. Een van de twee is P_{23}, afhankelijk van de rotatierichting om P_{13} van vlak 3 om vlak 1.

Binnen de kinematica van mechanismen kan men onderscheiden: het probleem van de classificatie van mechanismen, ook met betrekking tot beweeglijkheid



Figuur 4.9

(de classificatie), methoden om specifieke mechanismen te analyseren (de analyse), methoden om mechanismen te ontwerpen die aan specifieke eisen voldoen (de synthese). Watts parallellogram leidde tot de studie van de stangenvierzijde. Stephensons mechanisme leidde mede tot de studie van complexere stangenmechanismen. In de volgende sectie laten we een mooi resultaat zien uit het onderzoek van de stangenvierzijde en aan de hand van Stephensons mechanisme laten we zien dat de stelling van Aronhold-Kennedy een mooi grafisch hulpmiddel is om instantane rotatiecentra te vinden.

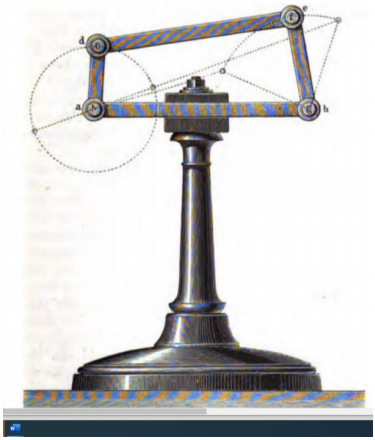


Figuur 4.10: P beschrijft een kromme van de 6e graad. Bron: `https://en.wikipedia.org/wiki/Watt's_linkage`.

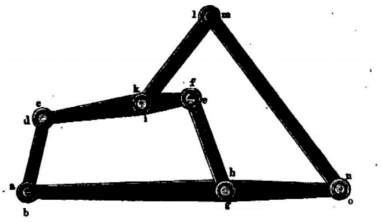
4.6 Watts parallellogram leidt tot theorie

Het uiteinde van de zuigerstang gaat vrijwel recht op en neer. Wat voor kromme beschrijft dat punt als we het mechanisme van Watt toepassen? Het blijkt een kromme van de 6e graad te zijn. Zie Figuur 4.10. In 1836/37 leidde de Belg Vincent een onaantrekkelijk uitziende vergelijking daarvoor af.

De rechtgeleiding van Watt in zijn simpele vorm heeft tot allerlei onderzoek geleid. Het was de Duitser Franz Reuleaux (1829–1905), werktuigbouwkundig ingenieur en hoogleraar, eerst aan de polytechnische school in Zürich en later in Berlijn, die zich realiseerde dat het gestel van een mechanisme kinematisch gezien dezelfde status heeft als de andere elementen van het mechanisme. Van hem komt het begrip kinematische keten. Een gesloten kinematische keten wordt een mechanisme als een element wordt vastgezet. De simpele rechtgeleiding van Watt wordt dan een voorbeeld van een stangenvierzijde.



Figuur 4.11: Stangenvierzijde waarvan de onderste stang gestel is geworden (Reuleaux, 1875), p. 51.

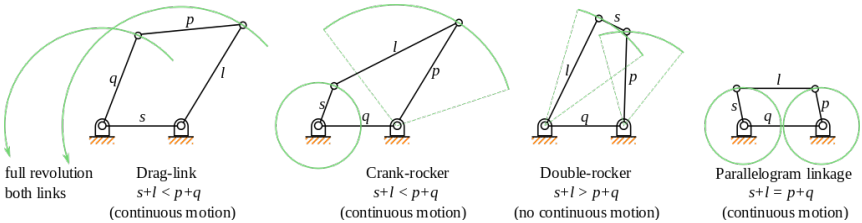


Figuur 4.12: Samengesteld kinematische keten (Ibidem, p. 53).

Kinematische ketens kunnen worden samengesteld en dat leidt tot hele complexe mechanismen.

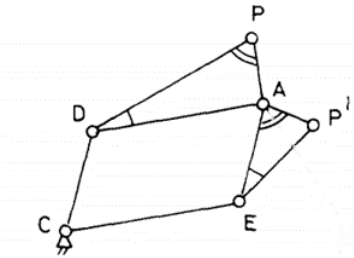
Een machine is voor Reuleaux een mechanisme of een combinatie van mechanismen dat tot doel heeft om natuurkrachten te dwingen bepaalde bewegingen te realiseren (Reuleaux, 1875), p. 38.

De stangenvierzijde heeft tot veel onderzoek geleid, onder andere met betrekking tot de beweeglijkheid. Zie Figuur 4.13.

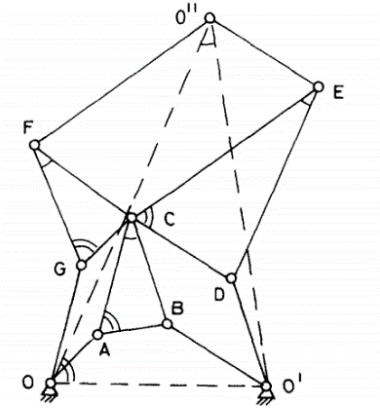


Figuur 4.13: Beweeglijkheid van de stangenvierzijde. Bron: `https://en.wikipedia.org/wiki/Four-bar_linkage`.

Het was Samuel Roberts (1827–1913) die in 1875 een artikel publiceerde waarin hij de krommen die je met de stangenvierzijde kunt genereren grondig analyseerde (Roberts, 1875). Roberts was vermoedelijk de eerste die zich realiseerde dat je niet alleen moet kijken naar punten op de koppelstang, maar het hele 'koppelvlak'. De krommen die die punten beschrijven heten 'koppelkrommen'. Het zijn tri-circulaire krommen van de 6e graad (hoogste graadsdeel is $(x^2 + y^2)^3$). We zien dat bij een relatief simpel mechanisme als de stangenvierzijde de beschreven krommen al vrij complex zijn. De poloden zijn evenmin simpel. Het zijn bicirculaire krommen van de 8e graad (Veldkamp, 1970), p. 144.



Figuur 4.14: De Plagiograaf van Sylvester.



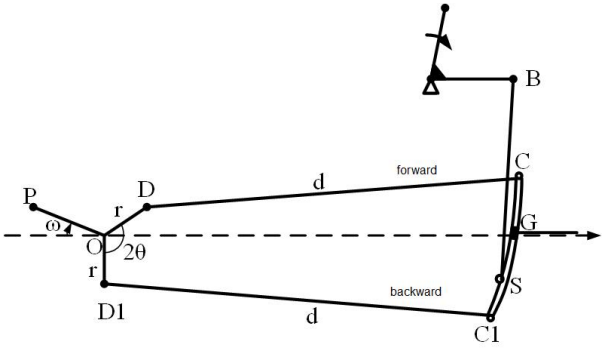
Figuur 4.15: De stelling van Roberts.

We zullen de kromme niet verder bestuderen. We behandelen alleen een fraaie stelling die Roberts in zijn artikel van 1875 bewees: de koppelkrommen van de stangenvierzijde kunnen door drie verschillende stangenmechanismen worden gegenereerd. Dat leidt tot de configuratie van Roberts. Zie Figuur 4.15. De

correctheid van de stelling kan worden ingezien met behulp van de plagiograaf van James Joseph Sylvester (1814–1897). Zie Figuur 4.14. C is een vast scharnierpunt en $CEAD$ is een parallellogram. Als we P' bewegen dan beschrijft P een met de baan van P' gelijkvormige figuur. Deze stelling van Roberts wordt ook wel de stelling van Roberts-Chebyshev genoemd omdat Chebyshev onafhankelijk van Roberts ontdekte dat een koppelkromme door twee verschillende stangenvierzijden kan worden voortgebracht.

4.7 Stephensons mechanisme leidt tot theorie

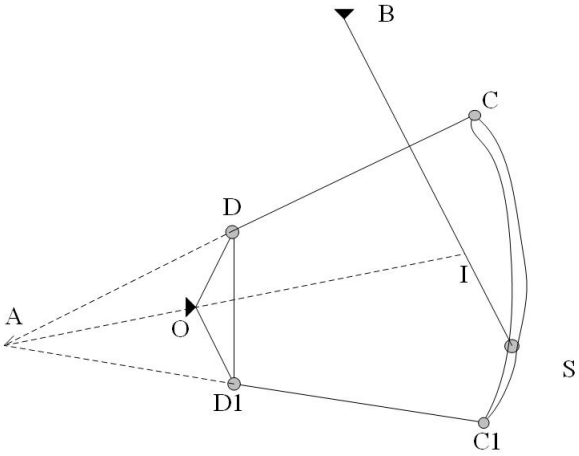
In 1853 publiceerde de Fransman Phillips (1829–1881) een analyse van het mechanisme. Een van de vragen die hij had was: Hoe beweegt de coulisse?



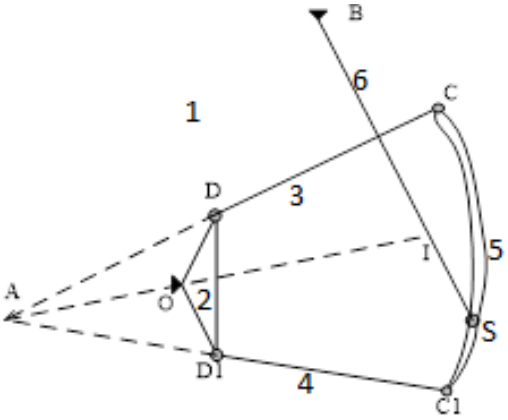
Figuur 4.16: Phillips analyseert de schaarbeweging van Stephenson.

Hij leidde daarbij een stelling af die door Henri Poincaré toen hij in 1885–1886 op de Sorbonne een cursus kinematica gaf "Le Théorème de Phillips" werd genoemd. De stelling luidt (Zie Figuur 4.17): Bij het mechanisme van Stephenson is het instantaan rotatiecentrum van de coulisse CC_1 het snijpunt van BS en AO waarbij A het snijpunt is van de twee excentriekstangen DC en D_1C_1. Met de stelling van Aronhold-Kennedy kan de juistheid van de stelling van Phillips snel worden ingezien. Zie Figuur 4.18.

We noemen het gestel 1, DC is 3, D_1C_1 is 4, ODD_1 is 2, CC_1 is 5 en BS is 6. Dan hebben we de rotatiecentra $O = P_{12}$, $D = P_{32}$, $D_1 = P_{24}$, $C_1 = P_{45}$, $C = P_{35}$, $B = P_{16}$ en $S = P_{65}$. Ga na dat nu $A = P_{25}$. Zodat het snijpunt van BS en OA het punt P_{51} levert. En dat levert de richting van de instantane snelheid van een willekeurig punt op CC_1.



Figuur 4.17: Stephensons mechanisme abstract in een bepaalde stand.

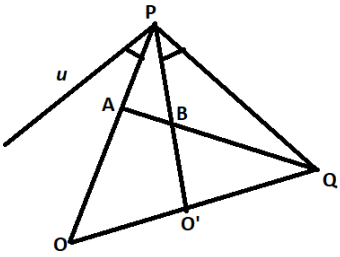


Figuur 4.18

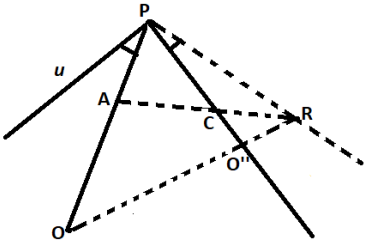
4.8 Slotopmerkingen

De opeenvolgende golven van industriële revolutie hebben het onderzoek naar stangenmechanismen sterk gestimuleerd. Dat er binnen de zuivere wiskunde in de 19e eeuw opnieuw grote belangstelling voor de meetkunde ontstond was een andere stimulerende factor. In die eeuw maakte echter de complexiteit van de bewegingen een analytische behandeling vaak onmogelijk. Dat is pas in de tweede helft van de 20e eeuw met de opkomst van de computer veranderd. Tot die tijd speelden grafische methoden een grote rol bij het analyseren en ontwerpen van mechanismen. De stelling van Aronhold-Kennedy illustreert dat fraai. Die maakt het mogelijk om ook bij complexe mechanismen instantane rotatiecentra te vinden.

Tot slot noem ik zonder bewijs nog de Stelling van Etienne Bobillier (1798–1840), die het mogelijk maakt om door herhaalde toepassing grafisch ook bij complexe mechanismen kromtemiddelpunten te vinden. Zie Figuur 4.19. De punten A en B liggen in het bewegend vlak. In de gegeven positie zijn punten O' en O de kromtemiddelpunten van de banen van respectievelijk A en B. Punt P is het instantaan rotatiecentrum en Q het snijpunt van AB en $O'O$. Dan zegt de stelling van Bobillier dat spiegeling van PQ in de bissectrice van $\square BPA$ de gemeenschappelijke raaklijn u in P aan bewegende en de vaste polode levert (Koetsier, 1986). Toepassing van Bobillier stelt ons in staat om, gegeven twee kromtemiddelpunten, bij een willekeurig ander punt in het bewegende vlak het bijbehorende kromtemiddelpunt te bepalen. Zie Figuur 4.20. Om het kromtemiddelpunt O'' van C te bepalen spiegelen we u in de bissectrice van $\square APC$ en trekken we AC. Dat levert R. RO snijdt dan PC in O''.



Figuur 4.19: Stelling van Bobillier.



Figuur 4.20: Toepassing van Bobillier.

Literatuur

(Arago, 1854): François Arago, Oeuvres de Francois Arago, Notices biographiques I, 371–510, Paris (1854).

(Aronhold, 1872): S.H. Aronhold, Grundzüge der kinematischen Geometrie, Verhandlungen der Verein zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preussen 51, 1872, pp. 129–155.

(Beniger, 1986): James Beniger, The Control Revolution: Technological and Economic Origins of the Information Society, Cambridge, MA, Harvard University Press, 1986.

(Clark, 2007): Gregory Clark, A Farwell to Alms, a brief economic history of the world, 2007.

(Economist, 1999): Catch the Wave, The Economist, February 18th, 1999. See `http://www.economist.com/node/186628`.

(Kennedy, 1887): A.B.W. Kennedy, Mechanics of Machinery, London, 1887.

(Koetsier, 1986): Teun Koetsier, From kinematically generated curves to instantaneous invariants: episodes in the history of instantaneous planar kinematics, Mechanism and Machine Theory Vol. 21, No. 6, pp. 489–498, 1986.

(Muirhead, 1854): James Patrick Muirhead, The Origin and Progress of the Mechanical Inventions of James Watt, Vol.' II, London, 1854.

(Phillips, 1854): E. Phillips, Théorie de la coulisse (de Stephenson) servant à produire le détente variable dans les machines à vapeur, et particulièrement dans les machines locomotives, Annales des Mines, Tome III, 1854. Duitse vertaling: E. Phillips, Theorie der variablen Expansion mittelst Stephenson's Coulisse, Civilingenieur, Bd. I, 1854, S. 164–182 (Tafel 18, Fig. 9 bis 14).

(Reuleaux, 1875): Franz Reuleaux, Theoretische kinematik. Grundzüge einer Theorie des Maschinenwesens, Braunschweig, 1875.

(Roberts, 1875): Samuel Roberts, Proceedings of the London Mathematical Society VII, 14–23 (1875).

(Veldkamp, 1970): Geert Remmert Veldkamp, Kinematica, Amsterdam, 1970. Opmerking: Dit is een erg goed boek. Helaas alleen antiquarisch te verkrijgen. De collegedictaten waarop het boek mede is gebaseerd zijn echter digitaal beschikbaar op
`https://casa.win.tue.nl/m/education/antieke-wiskunde-dictaten/`.

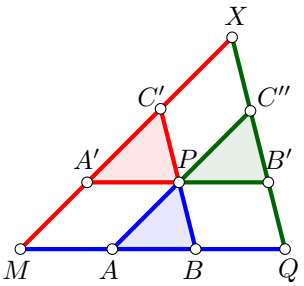
5 Vernuftige constructies
Rainer Kaenders

Nu dat we enkele basale eigenschappen van koppelkrommen en andere eenvoudige stangenconstructies in de vingers hebben gekregen, kijken we nu concreet naar enkele voorbeelden. Daarbij gaan we in het bijzonder in op verwante koppelmechanismes, lemniskaten en kegelsneden.

5.1 Verwante koppelmechanismes

In de stelling van Roberts en Chebychev is gebleken, dat we bij elke stangenconstructie nog twee verdere zulke constructies kunnen vinden, die dezelfde kromme voortbrengen. Dit willen we nu in concrete gevallen bekijken.

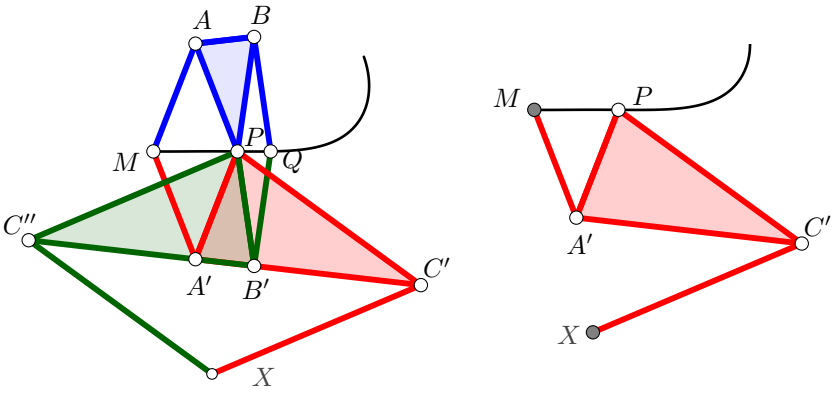
Hiervoor beschouwen we algemeen koppelmechanismes. Dus gaan we weer uit van een stangenvierhoek $MQBA$, waarbij M en Q vast aan het vlak verbonden zijn en er een vaste driehoek $\triangle ABC$ aan AB is vastgemaakt en star met AB meebeweegt. Alle andere lijnstukken en punten van het gehele plaatje met de drie koppelmechanismes vinden we door eenduidig bepaalde lijnen. Daabij houden we schematisch het patroon hier rechts aan.



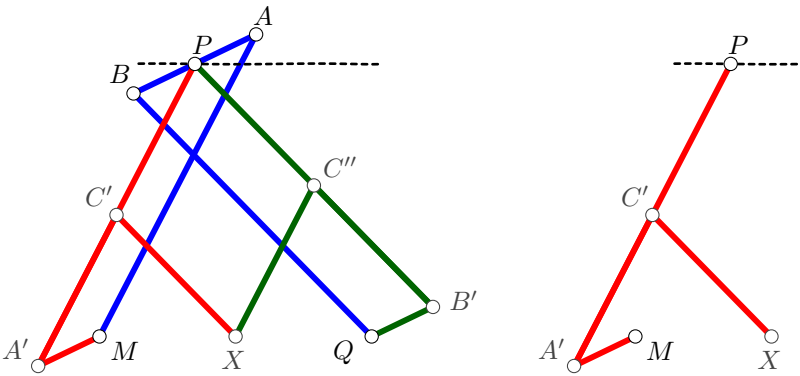
De constructie van Roberts voor een bijna-rechte lijn heeft twee verwante constructies, die elkaars gespiegelden zijn. De constructie gaat vanzelf als desbetreffende driehoeken gelijkvormig gekopieerd en de parallellogrammen volgens het schema gecompleteerd worden (zie figuur 5.1).

Ook het voorbeeld van Chebychev van een bijna-rechte lijn constructie was een koppelmechanisme en de vraag is, wat zijn twee verwante mechanismes zijn?

Hierbij is de driehoek $\triangle ABP$ ontaard, d.w.z. dat P ook op de lijn AB ligt. Gaan we ook hier het boven beschreven procedé volgen, dan verkrijgen we de constructie in figuur 5.2.



Figuur 5.1: De verwante koppelmechanismes bij de bijna-rechte-lijn constructie van Roberts



Figuur 5.2: De verwante koppelmechanismes bij de bijna-rechte-lijn constructie van Chebychev

De “Chebychev-schommelconstructie” is dus verwant met een “kraanconstructie”. Zulke kranen hebben de eigenschap dat er een einde op een vrijwel rechte lijn beweegt.

De beroemde loopmachine van Chebychev berust op deze verwante constructie, waarvan voor het *Mathfilm festival 2008* een prachtig geanimeerde filmm werd gemaakt, die we in de voordracht laten zien.[1] In deze film wordt ook herkenbaar dat de snelheden van de draaiende kruk en van de bijna-rechte beweging enigszins evenredig zijn.

5.1.1 De lemniscaat als koppelkromme

Veel koppelkrommen hebben de vorm van het cijfer acht. Ze worden soms ook *lemniskoïden* genoemd. De naam is des te meer terecht als ook de klassieke lemniscaat van Bernoulli door stangenconstructies kan worden getekend.

Hoewel de lemniscaat als kromme reeds door John Wallis (1616-1703) in zijn boek *Arithmetica Infinitorium* werd ingevoerd, wordt zij meestal verbonden met de naam Jacob Bernoulli (1654-1705), die er in het jaar 1694 een vergelijking voor heeft afgeleid. De lemniscaat is gedefinieerd als de verzameling punten waarvan het product van de afstanden tot twee gegeven punten constant is. In formule: gegeven twee punten F_1 en F_2 in het vlak met afstand $2c$, dan is de *lemniscaat* de meetkundige plaats van alle punten P in het vlak waarvoor geldt

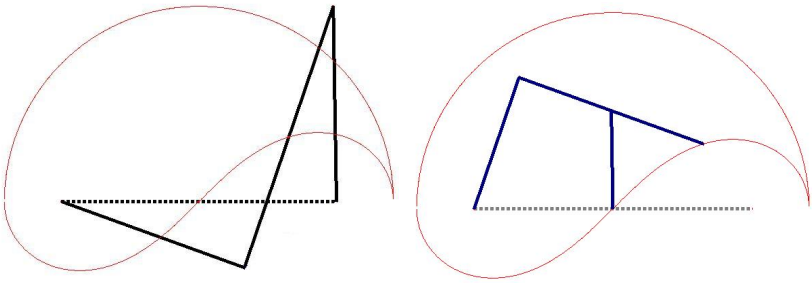
$$|PF_1| \cdot |PF_2| = c^2.$$

Deze klassieke lemniscaat ontstaat op twee verschillende verwante manieren als koppelkromme. In figuur 5.3 schetsen wij deze verwante constructies. De hoekpunten tussen de stangen zijn scharnierpunten.

Hierbij zijn de langere stangen $\sqrt{2}$ maal zo lang als de korte stangen waarvan wij de lengte c noemen. De horizontale gestippelde lijnen zijn bij beide constructies vast. Links wordt de lemniscaat beschreven als meetkundige plaats van het middelpunt van de andere lange zijde. In de rechter constructie is de bovenste stang twee keer zo lang (lengte $2c$) als de kortste stang (lengte c) en de lemniscaat is de meetkundige plaats van het losse eindpunt van deze stang.

Stelling 5.1.1. *Bij beide boven beschreven constructies is de koppelkromme gelijk aan de klassieke lemniscaat van Bernoulli.*

[1] Die Laufmaschine von Chebychev - (2008) 2 min, ID: 2008-15, Regisseur: Nikolai Andreev. In: MathFilm 2008 DVD - Eine Sammlung mathematischer Kurzfilme (2008). 60 min, ID: 2008-1, Produzent: K. Polthier, M. Aigner, T. Apostol, M. Emmer, H.C. Hege, U. Weinberg (Eds.) Springer Verlag. Nadere informatie op: `http://www.mathfilm2016.de/2008-15`.



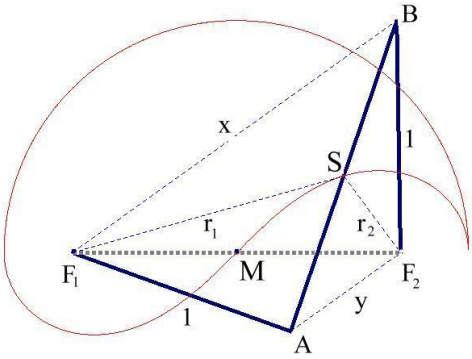
Figuur 5.3: Twee verwante constructies van de lemniscaat als koppelkromme

Wij bewijzen dat de constructie links de lemniscaat als koppelkromme levert. De constructie rechts is een verwante constructie in de zin van Roberts en Chebychev en we laten het over aan de lezer om dit in te zien.

Bewijs. Als wij de notatie uit het figuur hier rechts overnemen, dan is te bewijzen dat geldt: $r_1 r_2 = \frac{1}{2}$. Voor het gemak zetten wij hier $c = 1$.

Eerst merken wij op dat de driehoeken $\triangle F_1AS$ en $\triangle BAF_1$ gelijkvormig zijn, want de verhoudingen $\frac{|F_1A|}{|AB|}$ en $\frac{|AS|}{|F_1A|}$ zijn gelijk. Om een zelfde reden is driehoek $\triangle ABF_2$ gelijkvormig met driehoek $\triangle SBF_2$ en daarom:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{r_1}{1} \quad \text{en} \quad \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{r_2}{1}.$$



Bovendien, uit de gelijkvormigheid van $\triangle F_1AS$ en $\triangle BAF_1$ volgt dat $\measuredangle ABF_1 = \measuredangle BF_1F_2$ gelijk is aan $\angle AF_1S$. Als wij bij beide hoeken, $\angle BF_1F_2$ en $\angle AF_1S$, de hoek $\angle SF_1F_2$ weghalen vinden wij $\angle F_2F_1A = \angle BF_1S$. Hieruit volgt dat $\triangle AF_2F_1$ en $\triangle SBF_1$ gelijkvormig zijn en daarmee $\frac{x}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{y}$. Samengevat:

$$r_1 r_2 = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}.$$

Dit bewijst dat de klassieke lemniscaat ook een stangenconstructie is. □

Figuur 5.4: Lemniskaatkraan in Keulen

Zulke constructie, maar dan een beetje gedeformeerd, worden daadwerkelijk ook als kraanconstructies ingezet – het gaat hier dus om *lemniscaatkranen*. Hun voordeel is dat het uiteinde van hun kraanarm een heel stuk op een horizontale bijna-rechte-lijn verloopt.

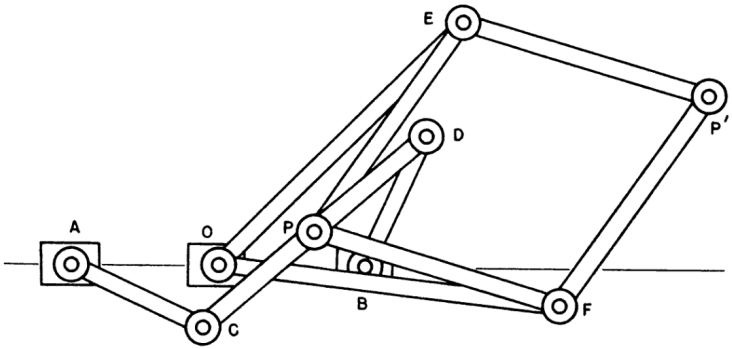
5.2 Kegelsneden

Als verder voorbeeld van concrete stangenconstructies willen we nu kijken naar constructies, die in staat zijn kegelsneden voort te brengen. Het makkelijkst lukt dit voor de hyperbool omdat de volgende stelling geldt.

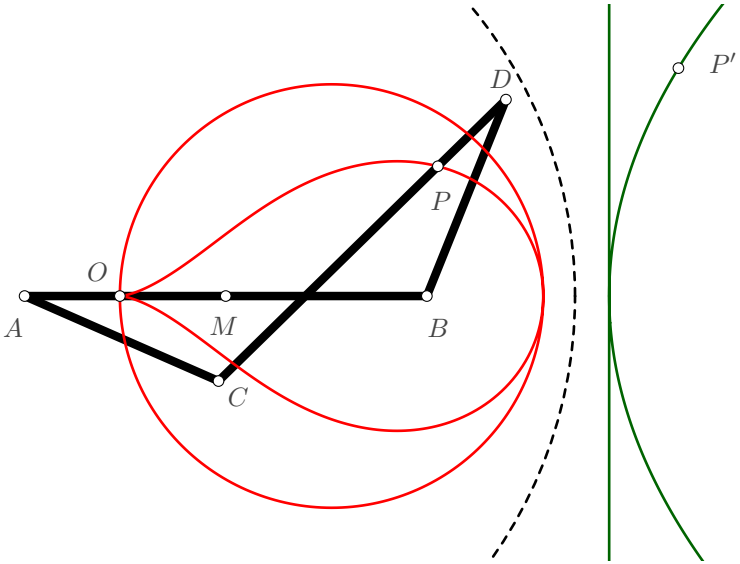
Stelling 5.2.1. *De lemniscaat van Bernoulli met centrum O heeft bij spiegeling aan een willekeurige cirkel rond O een orthogonale hyperbool als spiegelbeeld.*

Met deze stelling is duidelijk dat we de hyperbool met een combinatie van de constructie van de lemniscaat en van een inversor kunen tekenen.

Bewijs. Wij nemen de notatie over uit het bewijs van stelling 5.1.1. Allereerst merken we op dat naast $x \cdot y = 1$ ook $x^2 - y^2$ constant is, want als we het lood van B op de rechte AF_2 neerlaten tot een voetpunt L, dan kunnen we met Lemma



Figuur 5.5: Stangenconstructie voor alle kegelsneden uit *Curves and Their Properties* van Robert C. Yates: ellips, parabool en hyperbool



Figuur 5.6: Een kromme met een parabool als spiegelbeeld aan de cirkel

1.3.1 voor deze lijn en de punten A, F_2, L en B vinden:

$$|AB|^2 - |F_2B|^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{4}(x^2 - y^2).$$

We noemen $r := |MS|$ en als we aan cirkel met straal ρ spiegelen, dan zal het spiegelpunt van S nu S' gaan heten en we zetten $R := |MS'| = \frac{\rho^2}{r}$ als ook $R_1 := |F_1S'|$ en $R_2 := |F_2S'|$. Een spiegling aan een cirkel zorgt er altijd voor dat de hoekpunten van een driehoek met M als hoekpunt op de hoekpunten van een gelijkvormige driehoek met eveneens M als hoekpunt worden afgebeeld – ook al komt een van de zijden op een cirkelboog terecht. In ons geval betekent dat voor de driehoeken $\triangle F_1MS$ en $\triangle F_2MS$, dat

$$\frac{R_1}{R} = \frac{r_1}{\sqrt{2}} \quad \text{en} \quad \text{en} \quad \frac{R_2}{R} = \frac{r_2}{\sqrt{2}}.$$

Daarmee geldt, omdat we ook nog $r = |MS| = \frac{x+y}{2}$ hebben, dat

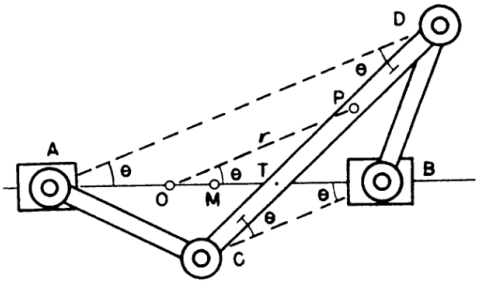
$$R_1 - R_2 = \frac{R}{\sqrt{2}}(r_1 + r_2) = \frac{\rho^2}{2r}(x+y) = \rho^2.$$

Als nu $r_2 > r_1$ is, gaat het bewijs net zo maar dan is $R_2 - R_1 = \rho^2$. □

Ook elke andere kegelsnede kan door een stangenmechanisme worden getekend. Het idee is net als bij de hyperbool om een door een contra-parallellogram geconstrueerde koppelkromme aan een cirkel te spiegelen. Hier volgen we het boek van Yates van Robert C. Yates[2]. In figuur 5.5 zien we een algemene stangenconstructie, waarmee alle kegelsneden te tekenen zijn.

Vóór dat we rechtstreeks naar dit mechanisme kijken, analyseren wij nogmaals een contra-parallellogram – maar nu nog preciezer.

Wij nemen de benameningen van de tekenig hier rechts over. Zet $|AB| = |CD| =: 2a$ en $|AC| = |BD| =: 2b$ en $a > b$. Er geldt dan $|AD| \cdot |BC| = 4\left(a^2 - b^2\right)$, omdat als L het voetpunt is van de loodlijn door A op de rechte BC, dan is volgens Lemma 1.3.1:



$$|BA|^2 - |CA|^2 = |BL|^2 - |CL|^2 = (|BL| + |CL|)(|BL| - |CL|) = |AD| \cdot |BC|.$$

[2]Loc.cit. blz. 51-54.

Kies nu een punt P op CD en teken het lijnstuk OP van lengte r evenwijdig met AD en BC. Tijdens de beweging blijft OP evenwijdig met AD en BC en dus blijft O op een vaste plek.

Noem nu S het midden van AD en R het midden van CB. Verder noemen we $|OM| =: c$ en $|MT| =: z$, warbij M het middelpunt is van AB. Het is dan $|AD| = 2|AS| = 2|AT|\cos\theta$ en $|BC| = 2|BR| = 2|BT|\cos\theta$. En het is $|AT| = (a+z)$ en $|BT| = (a-z)$. Dus hebben we:

$$\begin{aligned} |AD| &= 2|AT|\cos\theta = 2(a+z)\cos\theta \\ |BC| &= 2|BT|\cos\theta = 2(a-z)\cos\theta. \end{aligned}$$

Als wij deze uitdrukkingen nu vermenigvuldigen, verkrijgen we

$$\left(a^2 - z^2\right)\cos^2\theta = a^2 - b^2.$$

Dit kunnen we ook anders schrijven als volgt:

$$z^2\cos^2\theta = b^2 - \left(1 - \cos^2\theta\right)a^2.$$

Er geldt $r = 2\,(c+z)\cos\theta$ oftewel $\frac{r}{2} - c\cos\theta = z\cos\theta$ en dat vullen we nu in deze formule in om dan met de volgende vergelijking van de kromme, die door P wordt getekend, in poolcoördinaten (denk om $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$):

$$\left(\frac{r}{2} - c\cos\theta\right)^2 = b^2 - a^2\sin^2\theta.$$

Nu nemen we een inversor $OEPFP'$ ter hand, zodat O op O en P op P terecht komt en voor een zeker positief getal k geldt: $r \cdot R = 2k$ met $R := |OP'|$. De vergelijking in poolcoördinaten (R, θ) voor P' is dan

$$(k - cR\cos\theta)^2 = b^2R^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) - a^2R^2\sin^2\theta.$$

Uitgeschreven in cartesische coördinaten ($x = R\cos\theta$ en $y = R\sin\theta$) is dit

$$(k - cx)^2 = b^2\left(x^2 + y^2\right) - a^2y^2.$$

Nu sorteren we de termen anders en vinden de vergelijking van een kegelsnede:

$$\left(a^2 - b^2\right)y^2 - \left(b^2 - c^2\right)x^2 - 2ckx + k^2 = 0.$$

Het is een ellips bij $c > b$, een parabool bij $c = b$ en een hyperbool bij $c < b$.

In figuur 5.6 is een dergelijke constructie voor een parabool afgebeeld, waarbij de inversor alleen maar door de cirkel is gerepresenteerd, waaran gespiegeld wordt.

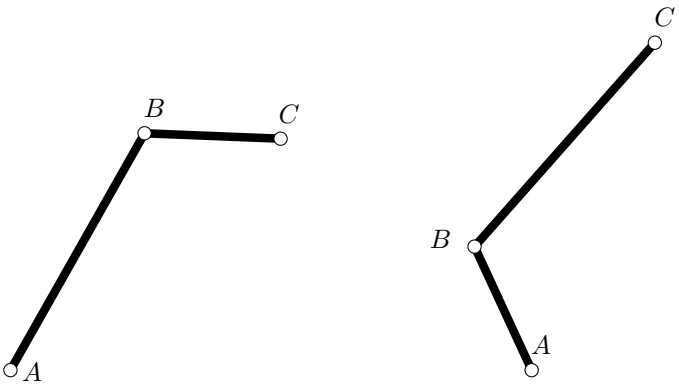
Er zijn ook andere eenvoudige stangenmechanismes voor kegelsneden. Een nogal ingewikkelde maar systematische stangenconstructie voor een parabool leren in de volgende voordracht na de workshop kennen. Maar eerst zullen we ons in de workshop met configuratieruimtes bezig houden.

6 Configuraties grijpen en begrijpen (Workshop)
Rainer Kaenders

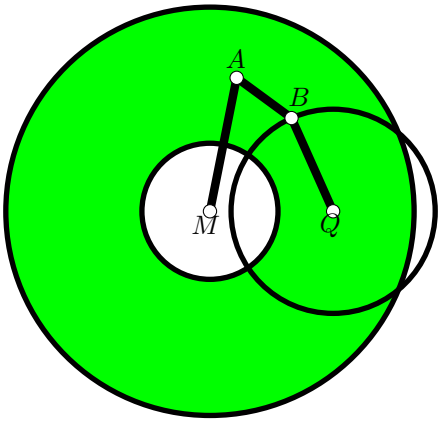
Soms heb je bijvoorbeeld stangenconstructies met een zekere bewegingsvrijheid. Als je de constructie dan uit elkaar schroeft en dezelfde stangen anders weer in elkaar zet, dan zijn er ineens andere bewegingen mogelijk. Hoe is dit mogelijk? En bij welke stangenconstructie kan die gebeuren en waar niet? In deze workshop houden we ons bezig met de beweeglijkheid van stangenconstructies. Welke stangenconstructies zijn star? Welke stang kan ten opzichte van welke andere stang rondgedraaid worden? Welke hebben verschillende standen, die niet elkaar kunnen worden overgevoerd? Zulke vragen zullen we hier onderzoeken.

Op zulke vragen kunnen we antwoorden vinden als we de configuratieruimtes van stangenconstructies begrijpen.

6.1 Twee stangen



De *configuratieruimte* van een enkele stang AB, waarbij A ergens in het vlak is vastgemaakt, is goed te beschrijven door de cirkel met middelpunt A, die door B gaat.



Figuur 6.1: Configuratieschema voor een stangenvierzijde

Gegeven twee stangen AB en BC van lengte b en c, die in A vast aan het vlak zijn verbonden en die in B een scharnier hebben.

1. Beschrijf het gebied, waar het punt C kan komen. Doe dit eerst voor $b = |AB| > |BC| = c$ en dan voor $b = |AB| > |BC| = c$. Hoe kun je de afmetingen van dat gebied in b en c uitdrukken?
2. Op welke manier zou een configuratieruimte van twee stangen beschreven kunnen worden? Onderscheid een rechtsknik en een linksknik, en denk aan een zwemband. Hoe gaat dat precies?

6.2 Stangenvierzijden

Nu onderzoeken we de configuraties van een stangenvierzijde $MQBA$, dat met M en Q in het vlak vast gemaakt is. Een stang tussen de punten A en B vormt de koppelstang en we benoemen de afstanden $a := |AM|$, $b := |BQ|$, $p := |MQ|$ en $k := |AB|$.

De volgende opgaven zijn bedoeld om discussiestof te geven.

1. Gebruik de configuratieruimtes voor $M - A - B$ en voor $Q - B$ om een configuratie van een stangenvierzijde $MQBA$ te beschrijven. Welke gevallen kun je hier op het eerste gezicht onderscheiden? Wat geldt er telkens voor de beweging van de stangen?

2. Doe hetzelfde voor $Q - B - A$ en voor $M - A$. Kun je de gevallen hier betrekken op de eerder onderscheden gevallen?

3. Geef de afmetingen a, b, p en k van stangenvierzijden (of de algemene condities voor a, b, p en k) voor stangenvierzijden, waar

   a) $M - A - B$ heeft soms een links- en soms een rechtsknik en is nooit samengeklapt. BQ schommelt alleen heen en weer. Elke stand van de stangenvierzijde is in elke andere over te voeren. $M - A - B$ heeft alleen een rechtsknik. MA schommelt alleen heen en weer. BQ draait helemaal rond. Niet elke stand van de stangenvierzijde is in elke andere over te voeren.

   b) $M-A-B$ heeft alleen een rechtsknik. MA en QB draaien helemaal rond. Elke stand van de stangenvierzijde is in elke andere over te voeren.

   c) $M - A - B$ heeft soms een links- en soms een rechtsknik en is nooit doorgestrekt. BQ schommelt alleen heen en weer. Elke stand van de stangenvierzijde is in elke andere over te voeren.

   d) $M-A-B$ heeft soms een links- en soms een rechtsknik. BQ schommelt alleen heen en weer. Niet elke stand van de stangenvierzijde is in elke andere over te voeren.

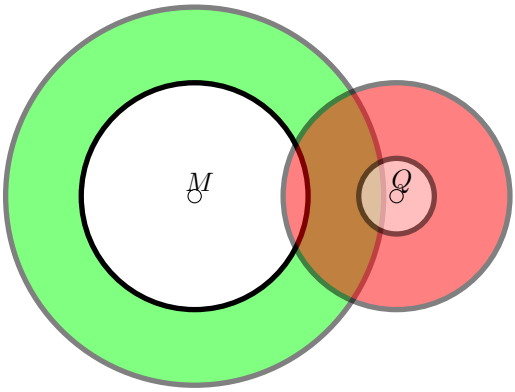
4. Beschrijf nu hoe het schema in figuur 6.2 de configuratieruimte van een stangenvijfzijde beschrijft.

5. Geef de afmetingen van een koppelmechanisme met een dubbelpunt en laat zien hoe je dit construeert.

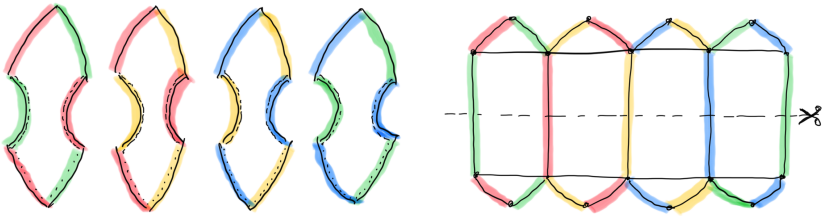
6.3 Stangenvijfzijden

Onderzoek nu mogelijke configuratieruimtes van stangenvijfzijden. Gegeven is een stangenvijfzijde $MQBCA$, dat met M en Q in het vlak vast gemaakt is. Een stang tussen de punten A en B vormt de koppelstang en we benoemen de afstanden $m := |AM|$, $q := |BQ|$, $p := |MQ|$, $c := |AB|$, $a := |BC|$, $b := |CA|$ en $k := |AB|$. De configuratieruimtes van $M - A - C$ en $Q - B - C$ zijn in figuur 6.2 aangeduid.

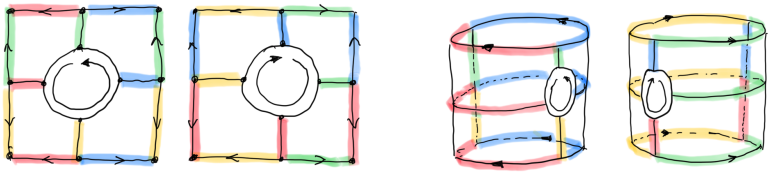
1. In figuur 6.3 ziet u links vier exemplaren van de doorsnijding van twee ringen. Op de randen van deze figuren is door kleur en lijnstructuur aangegeven, welke rand met welke andere rand moet worden samengeplakt om



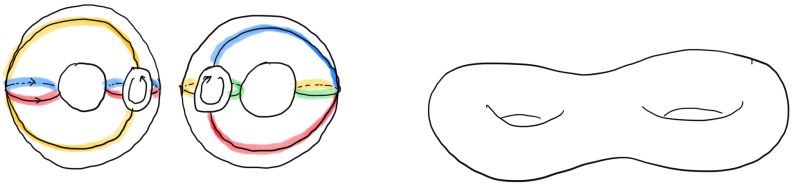
Figuur 6.2: Schema voor een configuratieruimte van een stangenvijfhoek



Figuur 6.3: De configuratie in vier delen en dan in hun midden samengeplakt



Figuur 6.4: De uiteen geknipte delen worden anders voorgestelt en verder samengeplakt



Figuur 6.5: Uiteindelijk alles samengevoegd tot één configuratieruimte

de configuatieruimte te krijgen. Leg uit hoe dat precies te begrijpen is.

2. Figuur 6.3 laat rechts zien hoe het eruit ziet als delen van deze randen samengeplakt zijn. Overtuig je ervan, dat dit met de tekening links consistent is.
3. Dit laatste figuur snijden we uit elkaar en zetten elk van de twee delen in figuur 6.4 samen. Leg uit.
4. Nu plakken we het figuur verder in elkaar en zetten elk van de twee delen in figuur 6.5 rechts samen. Leg uit.

7 Welke krommen kun je door stangen tekenen? Rainer Kaenders

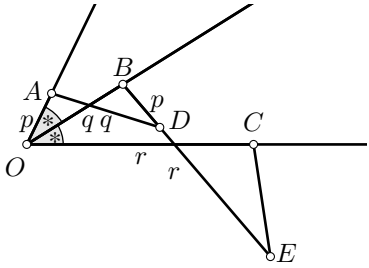
Welke krommen zijn überhaupt door stangenconstructies te tekenen? We hebben bijvoorbeeld gezien dat lijnen te tekenen zijn en ook hogere krommen zoals koppelkrommen.

Het hoofddoel van deze laatse voordracht zal zijn om in te zien, dat je elk deel van een reële algebraische kromme door een stangenconstructie kunt tekenen. Deze stelling staat bekend als *Kempe's universality theorem* en werd 1876 door Kempe in een korte notitie[1] bewezen. Tot de dag van vandaag is dit een stuk schitterende wiskunde. Kempes bewijs zullen we hier uit de doeken doen. Om het goed te begrijpen zullen we het voor de parabool in detail uit gaan stippelen. We sluiten met enkele algemene opmerkingen over de moderne kijk hierop.

7.1 Verdubbeling en optelling van hoeken en translatie

Een van de diepe inzichten van Kempe met betrekking tot stangenconstructies betreft het verdubbelen van hoeken door wat hij *contra-parallellogrammen* noemde.

Als je twee voldoende lange stangen a en b in het vlak hebt, die in een punt O samen een hoek φ vormen en een derde stang c in O aan de kant van b, die je zo wil arrangeren dat ook de hoek tussen b en c van grootte φ zal zijn, dan kies je lengtes p, q en r met de eigenschap dat $p : q$ zich verhoudt als $q : r$ en je kiest verder punten A,B en C op a, b en c zodat $|OA| = p$, $|OB| = q$ en $|OC| = r$.



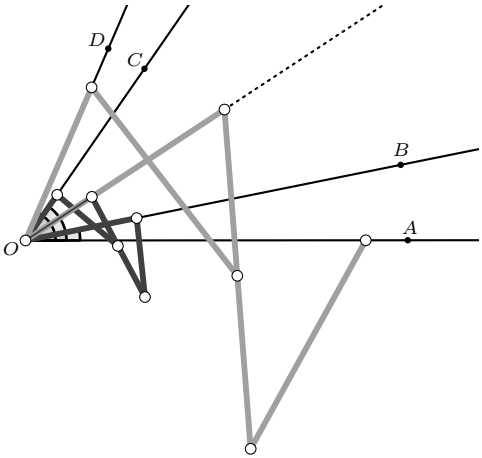
[1] Kempe, A.B. (1875) *On a General Method of describing Plane Curves of the n^{th} degree by Linkwork.* Proceedings of The London Mathematical Society,VII, No. 102, 213 – 216

Aan A maak je een stang s_A van lengte q en aan B een stang s_B van lengte r vast en aan C een stang s_C van lengte p vast. Het uiteinde van s_A zet je op een punt D op s_b zodat $|AD| = q$ is en het uiteinde van s_B verbind je tenslotte met het uiteinde van s_C in een punt E.

Voor deze figuur is het makkelijk met behulp van gelijkvormigheid van driehoeken in te zien dat $\measuredangle BOA = \measuredangle COB$. De contra-parallellogrammen $OBDA$ en $OCEB$ zijn namelijk gelijkvormig omdat alle corresponderende driehoeken dezelfde verhoudingen van de zijden hebben. In het bijzonder zijn dan de genoemde hoeken gelijk (zie ook de eerste workshop).

Een dergelijke dubbele contra-parallellogram kun je nu gebruiken om verschillende dingen te bereiken. Je kunt daarmee hoeken *halveren* en *verdubbelen*. Ingezet voor dit doeleind noemt Kempe het gereedschap *The Reverser*. Als in de tekening hier rechts twee van de stralen OA, OB of OC gegeven zijn, dan kun je zo ook de derde bepalen.

Dat wil zeggen dat we hiermee hoeken kunnen *verdubbelen* ofwel *halveren*. Dit komt goed van pas als we hoeken bij elkaar willen optellen of van elkaar willen aftrekken. Als in de constructie hier rechts bijvoorbeeld de hoeken $\measuredangle AOB$ en $\measuredangle AOC$ gegeven zijn, dan is



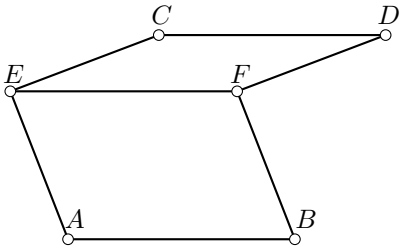
$$\measuredangle AOD = \measuredangle AOB + \measuredangle AOC.$$

Als aan de andere kant de hoeken $\measuredangle AOD$ en $\measuredangle AOC$ gegeven zijn, dan is

$$\measuredangle AOB = \measuredangle AOD - \measuredangle AOC.$$

Het op een dergelijke manier gehanteerde gereedschap heet bij Kempe *The Additor*. Als twee hoeken θ en ϕ door twee stangen ten opzichte van een derde referentiestang gegeven zijn, zo kunnen we voor natuurlijke getallen m en n een stang construeren die ten opzichte van deze derde stang een hoek heeft van $m\theta + n\phi$. En natuurlijk kunnen we er ook nog elke vaste hoek α, d.w.z. een hoek die tijdens de beweging niet verandert, bij optellen, zodat we tenslotte alle hoeken $m\theta + n\phi + \alpha$ kunnen maken.

De laatste voorbereiding voor het bewijs bestaat erin dat we beseffen dat je bij elke stang een evenwijdige stang ergens in het vlak kunt construeren. Dat doen we door twee parallellogrammen te gebruiken. Dan is AB evenwijdig met CD. Kempe noemt dit mechanisme *The Translator*.



7.2 Het bewijs voor de parabool als stangenconstructie

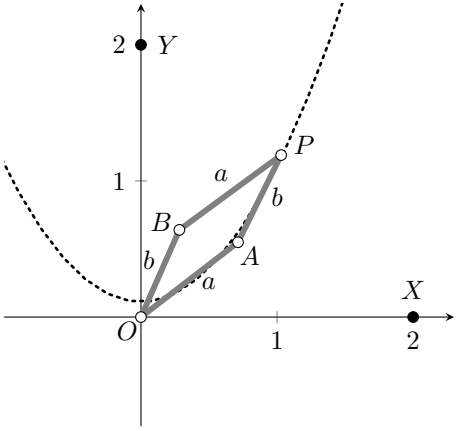
Vóór dat we het algemene bewijs induiken laten we zien hoe het bewijs voor de parabool zou lopen en we hier een constructie voor het tekenen van een parabool kunnen vinden. Het algemene bewijs is dan eigenlijk nog maar een fluitje van een cent omdat het niet veel anders loopt. De parabool geven we als de nulpuntsverzameling in $\mathbb{R}^2$ van de vergelijking (in onze concrete constructie is $c = 0.2$.)

$$\Phi(x, y) = x^2 - y + c = 0.$$

Anders gezegd, gaan we een stangenconstructie maken voor de grafiek van de functie $f(x) = x^2 + c$. We zullen zien dat dit geen sinecure is – tenminste vanuit het perspectief van het bewijs.

De basisconstructie is een parallellogram $OAPB$, waarbij het hoekpunt O in de oorsprong van het coördinatenstelsel ligt.

Het daar tegenoverliggende punt P (voor "pen") zal dan onze parabool gaan tekenen. Hier kunnen we nog alle punten in een deel van het vlak bereiken, naar mate hoe groot a en b zijn.
De zijden van het parallellogram zullen de lengtes a en b hebben, die we zo kiezen, dat met name het deel van de parabool, waarin wij geïnteresseerd zijn, bereikbaar is. (In ons concrete geval is $a = 0,9$ en $b = 0,7$.)



Het idee is nu dat we aan deze basisconstructie een aantal verdere constructies vast gaan maken, tot dat er een eindpunt van een stang ontstaat, dat alleen nog maar op een vertikale lijn op en neer kan lopen mits P op de kromme ligt. Daar zetten we dan een constructie tegenaan, die een lijn kan tekenen zoals bijvoorbeeld de cirkelinversor van Peaucellier-Lipkin.

Allereerst geven we de hoeken van de basisconstructie een naam:

$$\theta := \measuredangle XOA \qquad \text{en} \qquad \phi := \measuredangle XOB.$$

Het punt $P = (x, y)$ heeft dan de coördinaten

$$x = a\cos\theta + b\cos\phi, \quad \text{en} \quad y = a\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + b\cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right),$$

waarbij voor een hoek φ de uitdrukking $\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ hetzelfde is als $\sin\varphi$. Omdat wij bij alle punten uiteindelijk naar de x-coördinaat zullen kijken, gaan we hier alleen maar met de cosinusfunctie aan de slag. Voor de verdere operaties is daarom dan ook een regel van belang, die laat zien hoe het product van de cosinuswaarden van twee hoeken als som van cosinuswaarden kan worden geschreven. Het is de regel (ook bekend als één van de *prosthaphaeresis* formules):

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

en in het bijzonder $2\cos^2\alpha = \cos(2\alpha) + 1$. Deze regel is makkelijk in te zien als gevolg van het optellingstheorema voor $\cos(\alpha-\beta)$ en $\cos(\alpha+\beta)$.

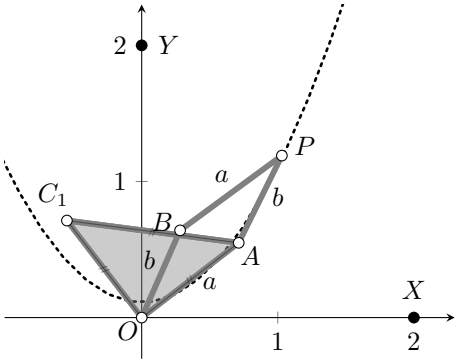
Als we met punt P de kromme doorlopen, zo moet voor coördinaten (x, y) van een punt P op de kromme gelden dat $\Phi(x, y) = 0$. Deze vergelijking geeft ons dus een eis, die de vrijheid waarin P in de basisconstructie verkeert, beperkt; $\Phi(x, y)$ moet gelijk aan nul zijn. De vergelijking $\Phi(x, y) = x^2 - y + c = 0$ wordt als volgt uitgewerkt met bovenstaande formule voor producten van cosinussen:

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y) &= (a\cos\theta + b\cos\phi)^2 - a\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + b\cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + c \\
&= a^2\cos^2\theta + b^2\cos^2\phi + 2ab\cos\theta\cos\phi - a\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + b\cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + c \\
&= \frac{a^2}{2}(\cos(2\theta) + 1) + \frac{b^2}{2}(\cos(2\phi) + 1) + ab(\cos(\theta+\phi) + \cos(\theta-\phi)) \\
&\qquad - a\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + b\cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + c \\
&= -a\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - b\cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{a^2}{2}\cos(2\theta) + \frac{b^2}{2}\cos(2\phi) \\
&\qquad + ab\cos(\theta+\phi) + ab\cos(\theta-\phi) + \left(\frac{a^2+b^2}{2} + c\right) = 0.
\end{aligned}$$

Bij elk van deze termen kunnen we, uitgaande van onze basisconstructie, nu een constructie bouwen, waarvan het eindpunt deze term als x-coördinaat heeft.

Bijvoorbeeld zien we in de volgende constructie dat het punt C_1 bij elke stand van de basisconstructie de x-coördinaat $-a\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ zal hebben. Op een analoge wijze construeren we een punt C_2 dat bij elke stand van de basisconstructie de x-coördinaat $-b\cos\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)$ heeft.

Met behulp van *The Reversor*, *The Multiplicator*, *The Additor* en *The Translator* is het mogelijk om stangenconstructies met punten $C_1,\ldots,C_6$ te bouwen, zo dat de x-coördinaat van punt C_3 de term $\frac{a^2}{2}\cos(2\theta)$ is en de x-coördinaat van punt C_4 bij $\frac{b^2}{2}\cos(2\phi)$ zal zijn. En verder kunnen we nog constructies met punten C_5 respectievelijk C_6 met de x-coördaat $ab\cos(\theta+\phi)$ respectievelijk $ab\cos(\theta-\phi)$ vinden.



Vatten we dit samen, dan hebben we – uitgaande van onze basisconstructie – punten $C_1,\ldots,C_6$ geconstrueerd met de volgende eigenschappen.

C_1	heeft x-coördinaat	$-a\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$
C_2	heeft x-coördinaat	$-b\cos\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)$
C_3	heeft x-coördinaat	$\frac{a^2}{2}\cos(2\theta)$
C_4	heeft x-coördinaat	$\frac{b^2}{2}\cos(2\phi)$
C_5	heeft x-coördinaat	$ab\cos(\theta+\phi)$
C_6	heeft x-coördinaat	$ab\cos(\theta-\phi)$

Deze x-coördinaten van C_1 tot en met C_6 opgeteld zijn dan $-\left(\frac{a^2+b^2}{2}+c\right)$.

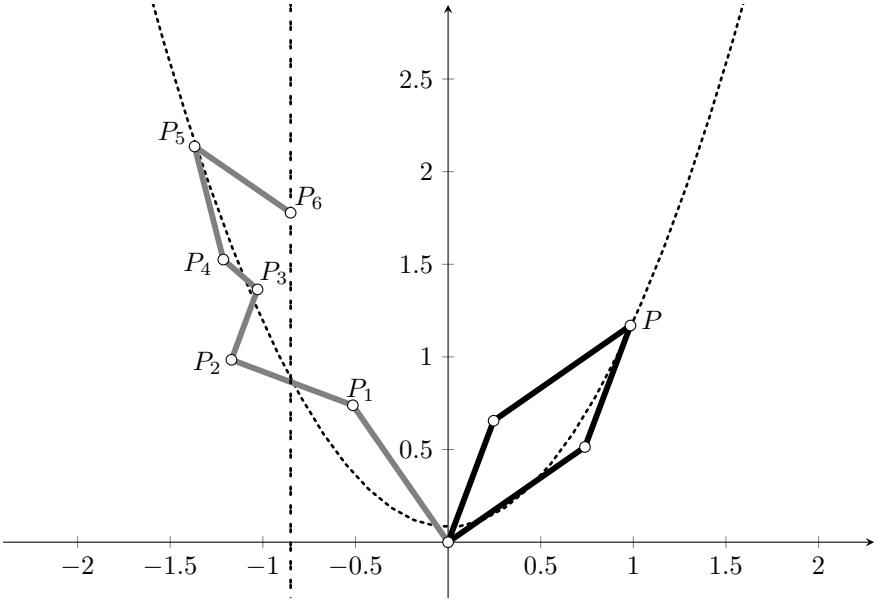
Nu komt *The Translator* in het spel. Hiermee kunnen we bewegelijke stijgers gaan bouwen die ervoor zorgen dat we onze stangenconstructie op kunnen bouwen zodat punten $P_1,\ldots,P_6$ onstaan met de eigenschap dat $P_1=C_1$ en verder dat voor $i=2,\ldots,6$ geldt $P_{i-1}P_i$ is bij elke stand van de basisconstructie evenwijdig en even lang als OC_i. Hiervoor construeren we met behulp van *The Translator* constructies die stapsgewijs voor $i=2,3,4,5,6$ de stang OC_i evenwijdig verschuiven zodat O op P_{i-1} terecht komt. Zodoende vinden we dus het

punt P_6 wiens x-coördinaat bij elke stand van de basisconstructie gelijk is aan

$$-\left(\frac{a^2+b^2}{2}+c\right)$$

dan en slechts dan als P op de kromme ligt.

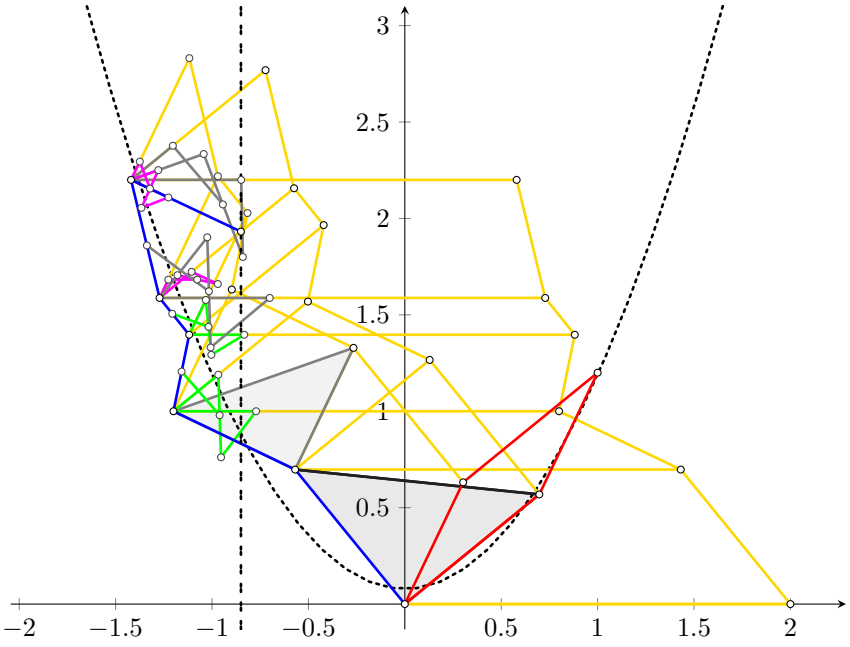
Hiermee is duidelijk, dat we de parabool als stangenconstructie kunnen maken.



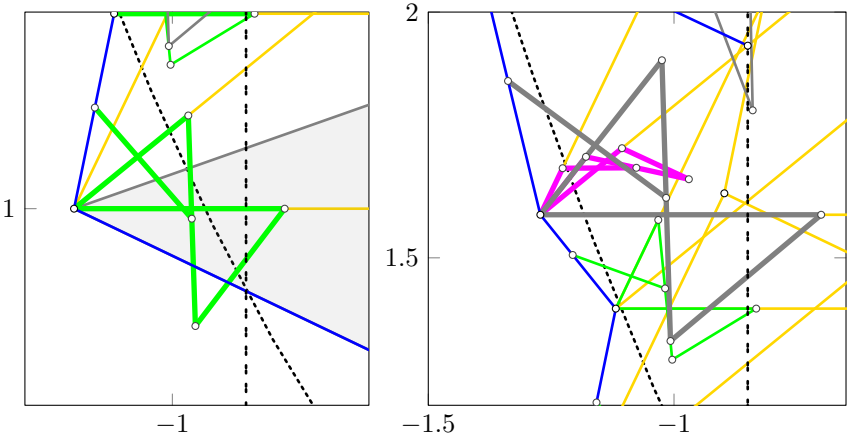
Gaan we hier serieus werk van maken dan lijkt dit gecompliceerd. De manier van werken is echter duidelijk. In de afbeelding 7.1 is de basisconstructie en daaraan vast gemaakt de hele constructie met de vele translatoren in de vorm van parallellogrammen als een soort steiger te zien.

Aan het einde van de reeks blauwe stangen vinden we het punt P_6 dat op een lijn gaat lopen. Hier moet dan nog een constructie tegenaan worden gezet, waarbij P_6 op een vertikale lijn wordt gedwongen.

In het geheel ontdekken we drie verschillende soorten constructies. Allereerst zijn er twee constructies met gelijkbenige rechthoekige driehoeken om de termen $-a\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ en $-b\cos\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)$ te maken. Verder hebben we twee keer een mechanisme voor de verdubbeling van hoeken (zie figuur 7.2), verantwoordelijk voor de termen $\frac{a^2}{2}\cos(2\theta)$ en $\frac{b^2}{2}\cos(2\phi)$. En tenslotte nog twee constructies voor het optellen, respectieve aftrekken van hoeken (zie eveneens figuur 7.2). Hierdoor worden $ab\cos(\theta+\phi)$ en $ab\cos(\theta-\phi)$ gemaakt.



Figuur 7.1: De gehele constructie voor de parabool



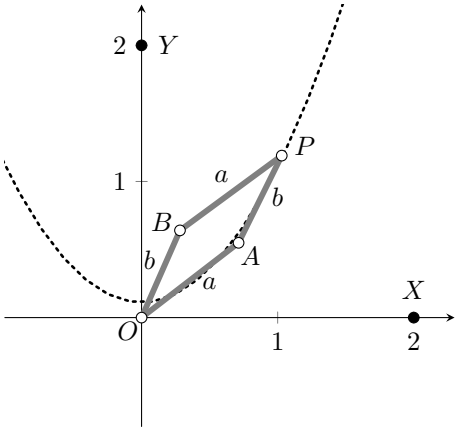
Figuur 7.2: Links *The Multiplicator*: mechanisme voor de verdubbeling van een hoek en rechts *Th Reverser* en *The Additor*: constructie voor het optellen van hoeken

7.3 Het algemene bewijs

Het algemene bewijs gaat op dezelfde manier en eigenlijk kunnen we er nu kort over zijn. De kromme is gegeven we als de nulpuntsverzameling in $\mathbb{R}^2$ van een vergelijking $\Phi(x, y) = 0$.

De basisconstructie is weer een parallellogram $OAPB$, waarbij de hoek O in de oorsprong van het coördinatenstelsel ligt.

Het daar tegenoverliggende punt P zal dan onze kromme gaan tekenen. Door de speciale keuze van de basisconstructie kunnen we in principe alle punten in een deel van het vlak bereiken. De zijden van het parallellogram hebben de lengtes a en b, die we zo kiezen, dat met name het deel van de kromme, waarin wij geïnteresserd zijn, bereikbaar is, naarmate hoe groot a en b zijn.



Ook in het algemene geval is het idee dat we aan deze basisconstructie een aantal verdere constructies vast gaan maken, tot dat er een eindpunt van een stang ontstaat, dat alleen nog maar op een vertikale lijn op en neer kan lopen mits P op de kromme ligt. Daar zetten we dan een constructie tegenaan, die een lijn kan tekenen zoals bijvoorbeeld de cirkelinversor van Peaucellier-Lipkin.

Dus ook hier geven we weer de hoeken van de basisconstructie een naam:

$$\theta := \measuredangle XOA \qquad \text{en} \qquad \phi := \measuredangle XOB.$$

Het punt $P = (x, y)$ heeft dan de coördinaten

$$x = a\cos\theta + b\cos\phi, \quad \text{en} \quad y = a\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + b\cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Weer gebruiken we de regel voor het product van cosinussen (één van de *prosthaphaeresis* formules):

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

Als we met punt P de kromme doorlopen, zo moet voor coördinaten (x, y) van een punt P op de kromme gelden dat $\Phi(x, y) = 0$. Deze vergelijking geeft ons

dus een eis, die de vrijheid waarin P in de basisconstructie verkeert, beperkt; $\Phi(x, y)$ moet gelijk aan nul zijn. De vergelijking $\Phi(x, y) = 0$ wordt nu met deze regel uitgewerkt en we vinden dat een som, met maar eindig veel van nul verschillende cosinustermen en met $\alpha_{mn} \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$, van het volgende soort een constant getal c moet zijn

$$\sum_{m,n\in\mathbb{N}} A_{mn} \cos\left(m\theta + n\phi + \alpha_{mn}\right) = c.$$

Bij elk van deze termen $A_{mn} \cos\left(m\theta + n\phi + \alpha_{mn}\right)$ kunnen we, uitgaande van onze basisconstructie, nu met behulp van *The Reversor*, *The Multiplicator*, *The Additor* een constructie bouwen, waarvan het eindpunt C_{mn} deze term als x-coördinaat heeft. Deze constructies en hun eindpunten nummeren we nu in een rij van N punten $C_1, C_2, \ldots, C_N$. De x-coördinaten van al deze punten opgeteld zijn constant (niet noodzakelijk c).

The Translator zorgt er nu voor dat bij punt C_1, dat we nu ook P_1 noemen, de horizontale richting en de hoeken θ en ϕ ter beschikking staan. Hiermee wordt dan met behulp van de constructie van C_2 een punt P_2 geconstrueerd zodat P_1P_2 evenwijdig aan en even lang is als OC_2. Weer gebruiken wij *The Translator* om bij punt P_2 de horizontale richting en de hoeken θ en ϕ voor de verdere constructie worden ingezet. Met de constructie van C_3 construeren wij een punt P_3 zodat P_2P_3 evenwijdig aan en even lang is als OC_3. Zo gaan we door tot dat we een punt P_N hebben geconstrueerd.

Op deze manier bouwen we onze stangenconstructie op zodat punten $P_1, \ldots, P_N$ onstaan met de eigenschap dat $P_1 = C_1$ en verder dat voor $i = 2, \ldots, N$ geldt $P_{i-1}P_i$ is bij elke stand van de basisconstructie evenwijdig en even lang als OC_i. Daarmee vinden we dus het punt P_N wiens x-coördinaat bij elke stand van de basisconstructie gelijk aan een bepaalde constante is dan en slechts dan als P op de kromme ligt. Alle hulpconstructies zoals de (contra-)parallellogrammen of de lijnvoering door bijvoorbeeld een cirkelinversor kunnen willekeurig worden uitvergroot, zodat je in elke stap een zo groot bereik van de desbetreffende constructie ter beschikking hebt als dat telkens nodig is.

Hiermee is duidelijk, dat we de gegeven kromme door een stangenconstructie in het door de basisconstructie gegeven gebied kunnen tekenen en de geldigheid van deze uitspraak is volledig aangetoond.

7.4 Tot slot

De door stangenconstructie geconstrueerde krommen zijn allemaal ook deel van een algebraische kromme, wat we hier niet aan zullen tonen.[2] Daarmee geldt dat de door stangenconstructies tekenbare krommen precies de reëel algebraische krommen zijn.

Tegenwoordig is de studie van stangenconstructies veel verder gevorderd dan alles wat we hier hebben laten zien. Zij worden met behulp van de kinematische afbeelding van Eduard Study, met behulp van algebraische eigenschappen van quaternionen, met algebraïsche meetkunde over de complexe getallen en veel ander indrukwekkend gereedschap uit de moderne wiskunde bestudeerd. Een bekend boek hierover is bijvoorbeeld "Theoretical Kinematics" van Oene Bottema en Bernard Roth.[3] En Oene Bottema was trouwens één van de eerste sprekers in de vakantiecursus voor wiskunde in het jaar 1946.

Dank

Allereerst wil ik de gastsprekers Theo Jansen en Teun Koetsier voor hun waardevolle bijdrage aan deze vakantiecursus noemen. En hoe leuk dat Ivo Schoofs spontaan nog mee zal doen. Deze gastsprekers zullen de 75e vakantiecursus opluisteren en daar ben ik hen bijzonder dankbaar voor. Ten tweede dank ik alle deelnemers van de cursus, die na deze corona-pandemie weer mogelijk maken, dat er gemeenschap met wiskunde ontstaat.

Verder geldt mijn dank de programmacommissie van de vakantiecursus voor het vertrouwen dat zij in mij heeft gesteld en de ondersteuning, die ik bij de voorbereiding ervaren heb. Ook dank aan Sjoukje Talsma van het Bureau Platform Wiskunde Nederland en aan de verantwoordelijke locale organisatoren op het CWI en aan de TU/e voor hun behulpzame steun.

En tenslotte dank ik mijn vrouw Ysette voor haar gestage steun en voor haar begrip gedurende de laatste weken in deze tijd van vakantie. R.K.

[2] Zie: Walter Wunderlich (1970). *Ebene Kinematik.* BI-Hochschultaschenbücher, Mannheim – Wien – Zürich.

[3] O. Bottema & B. Roth (1991). *Theoretical Kinematics.* Dover Publications Inc. In het boek wordt trouwens ook onze spreker Teun Koetsier met twee publicaties uit 1969 en 1970 genoemd: eentje met Bottema en Roth en eentje met Bottema en Ferdinand Freudenstein.

8 Theo Jansen en zijn strandbeesten Speciale gast

Theo Jansen is alom bekend van zijn strandbeesten. Deze kunstwerken staan ook in verband met het onderwerp van deze cursus, en daarom sluiten we hiermee op zaterdag de Vakantiecursus af.

Theo Jansen houdt zich sinds 1990 bezig met het creëren van nieuwe levensvormen: de zogenaamde strandbeesten. Deze zijn niet gemaakt van eiwitten zoals bestaande levensvormen, maar ze zijn gemaakt van een ander basismateriaal: gele plastic buisjes. Skeletten gemaakt van deze buizen zijn in staat om te lopen. Ze halen hun energie uit de wind. Ze evolueerden over vele generaties en werden steeds beter in het overleven van stormen en water uit de zee. Door deze schepping opnieuw te maken, hoopt hij wijzer te worden in de omgang met de bestaande natuur door problemen tegen te komen waarmee de echte Schepper te maken had.

Theo Jansen's website: `https://www.strandbeest.com/`.

(achterkant)