Het $3n + 1$-vermoeden

Benne de Weger

b.m.m.d.weger@tue.nl

co-auteurs: John Simons, Thijs Laarhoven

3TU-studiedag, 19 juni 2013

Technische Universiteit
Eindhoven
University of Technology

Where innovation starts

Het $3n + 1$-proces

Neem een natuurlijk getal.

- Is het even, dan deel je het door 2.
- Is het oneven, dan vermenigvuldig je het met 3 en tel je er 1 bij op.

Met de uitkomst doe je hetzelfde, net zo lang tot je het zat bent.

$1 \to 4 \to 2 \to 1 \to 4 \to 2 \to 1 \to \ldots$ (ik ben het al zat)
$2 \to 1 \to \ldots$ (al gezien)
$3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to \ldots$ (al gezien)
$4 \to 2 \to 1 \to \ldots$ (al gezien)
$5 \to 16 \ldots$ (al gezien) $\ldots \to 1 \to \ldots$
$6 \to 3 \to 10 \ldots$ (al gezien) $\ldots \to 1 \to \ldots$
$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \ldots$ (al gezien) $\ldots \to 1 \to \ldots$

De $3n+1$-functie

Na een oneven getal komt *altijd* een even getal en dus *altijd* een deel-door-2-stap. Die twee stappen zien we voortaan als één stap.

De $3n+1$-functie $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is gedefinieerd door

$$T(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is,} \\ (3n+1)/2 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Het $3n+1$-proces is nu *iteratie* van T:

$$n \to T(n) \to T(T(n)) \to T(T(T(n))) \to \ldots \to T(\ldots T(n)\ldots) \to \ldots$$

Dat kunnen we handiger noteren:

$$n \to T(n) \to T^2(n) \to T^3(n) \to \ldots \to T^k(n) \to \ldots$$

Voorbeeld:

$$7 \to 11 \to 17 \to 26 \to 13 \to 20 \to 10 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \leftrightarrows 1$$

Het $3n+1$-vermoeden

Het $3n+1$-vermoeden is nu:

Met ieder positief geheel getal n als startwaarde komt het $3n+1$-proces op den duur uit bij 1, en 'eindigt' dus in de *cykel* $\ldots \to 2 \leftrightarrows 1$.

Wat formeler:

Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ is er een $k \in \mathbb{N}$ zodat $T^k(n) = 1$.

Deze cykel $1 \leftrightarrows 2$ noemen we de *triviale cykel*.

Definities

Voor $n \in \mathbb{N}$ noemen we de rij $\left(n, T(n), T^2(n), \ldots\right)$ de *baan* van n.

Als voor zekere $k, n \in \mathbb{N}$ geldt dat $T^k(n) = n$
dan noemen we $\left(n, T(n), T^2(n), T^{k-1}(n)\right)$ een *cykel*.

Voorbeeld: de triviale cykel noteren we dus als $(1, 2)$ (of $(2, 1)$).

Als een baan een cykel bevat (en daar dus in eindigt), dan noemen we de baan *convergent*. Een niet-convergente baan heet *divergent*.

Een divergente baan is onbegrensd.

Banen kunnen lang divergent lijken:

$27 \to 41 \to 62 \to 31 \to 47 \to 71 \to 107 \to 161 \to 242 \to 121 \to 182 \to 91 \to 137 \to 206 \to 103 \to 155 \to 233 \to 350 \to 175 \to 263 \to 395 \to 593 \to 890 \to 445 \to 668 \to 334 \to 167 \to 251 \to 377 \to 566 \to 283 \to 425 \to 638 \to 319 \to 479 \to 719 \to 1079 \to 1619 \to 2429 \to 3644 \to 1822 \to 911 \to 1367 \to 2051 \to 3077 \to 4616 \to 2308 \to 1154 \to 577 \to 866 \to 433 \to 650 \to 325 \to 488 \to 244 \to 122 \to 61 \to 92 \to 46 \to 23 \to 35 \to 53 \to 80 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \leftrightarrows 1$

maar toch convergent blijken.

Geschiedenis

Lothar Collatz heeft het (naar eigen zeggen) rond 1930 bedacht.

In 1950 praatte hij er met veschillende mensen over op het ICM in Cambridge (Mass.) en raakte het bekend.

In de jaren 60 verschijnen de eerste artikelen over varianten van het probleem (o.a. een variant beschreven door Raymond Queneau gerelateerd aan rijmschema's in 12e-eeuwse poezie).

In 1971 verschijnt het echte $3n + 1$-probleem voor het eerst in druk. Martin Gardner schrijft erover in 1972, en dan wordt het beroemd.

Het staat nu ook bekend als o.a. het Syracuse-probleem, het probleem van Hasse, van Kakutani, van Coxeter, van Ulam, hagelsteen-getallen, enzovoorts.

Jaren 60: 8 artikelen, jaren 70: 34 artikelen, jaren 80: 52 artikelen, jaren 90: 103 artikelen, jaren 00: 134 artikelen.

Literatuur

- Jeffrey C. Lagarias (ed.): *The Ultimate Challenge: The* $3x + 1$ *Problem*, Am. Math. Soc., 2010
  dit boek is een bundeling van de belangrijkste artikelen
- Jeffrey C. Lagarias, "The $3x + 1$ problem and its generalizations", Am. Math. Monthly **92** [1985], 3–23
  gedetailleerde geschiedenis tot 1985
- Jeffrey C. Lagarias, "The $3x + 1$ problem: an annotated bibliography (1963–1999)", arxiv.org.
  korte samenvattingen van alle verschenen artikelen voor 2000
- Jeffrey C. Lagarias, "The $3x + 1$ problem: an annotated bibliography II (2000–2009)", arxiv.org.
  korte samenvattingen van alle verschenen artikelen in 2000–2009

Waarom zou het $3n + 1$-vermoeden waar zijn?

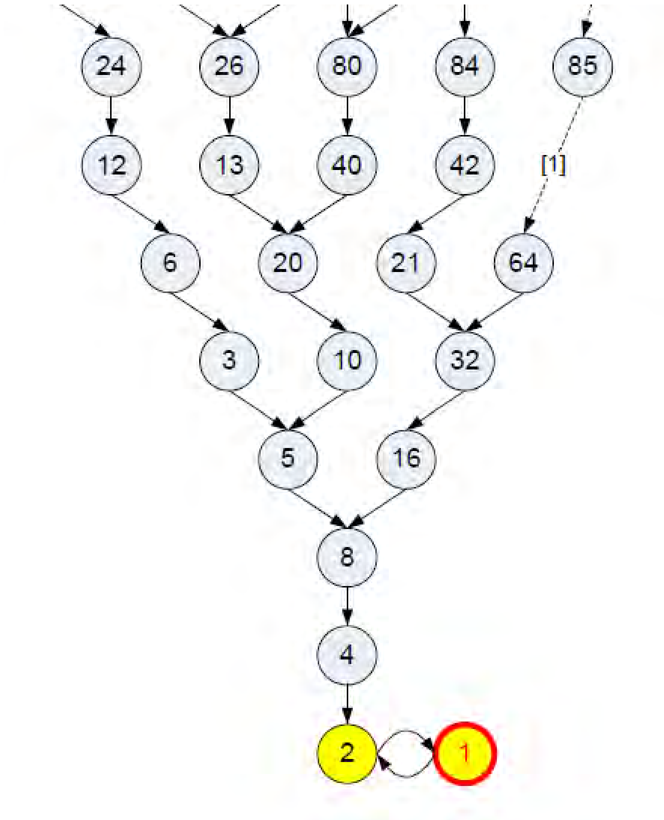
Argumenten:

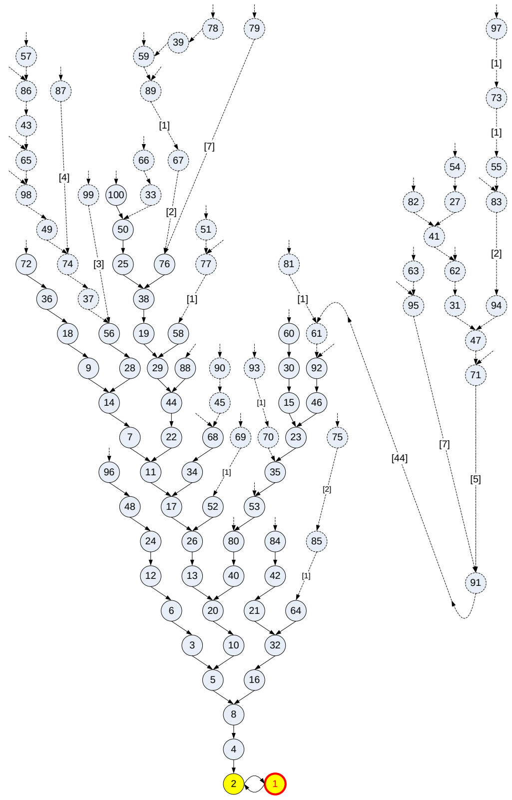
- Experimenteel
- Probabilistisch
- Logisch / Complexiteitstheoretisch
- Diophantisch
- Dynamische systemen / ergodisch (zeg ik niets over)

Herformuleringen:

- Grafen
- Modulaire en De Bruijn-grafen
- Oneindige matrices
- Eigenruimtes
- Functionaalvergelijkingen

De $3n + 1$-graaf





Verwante problemen: $3n - 1$

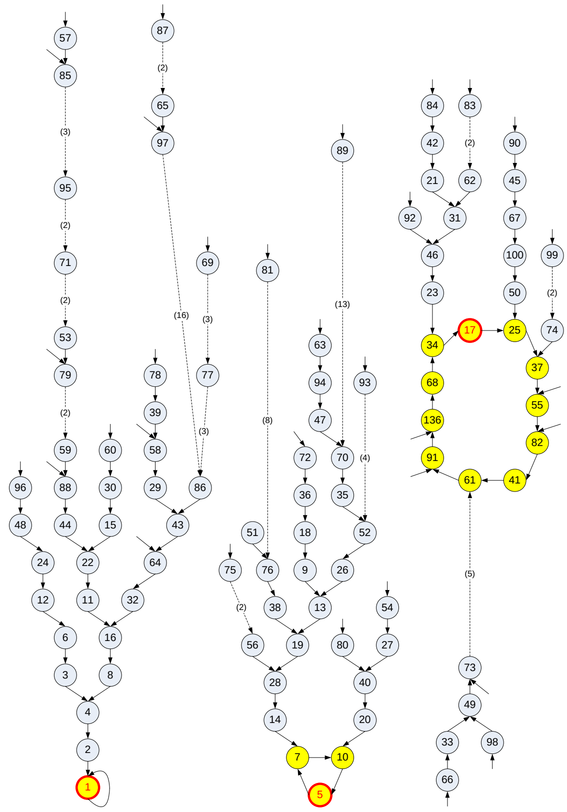
De $3n - 1$-functie:

$$T_{3,-1}(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is,} \\ (3n-1)/2 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Equivalent met $3n + 1$ op de negatieve getallen:
$T(-n) = -T_{3,-1}(n)$

Er zijn (vermoedelijk) 3 cykels, en (vermoedelijk) geen divergente banen

Deze graaf is niet samenhangend, er zijn tenminste 3 componenten.

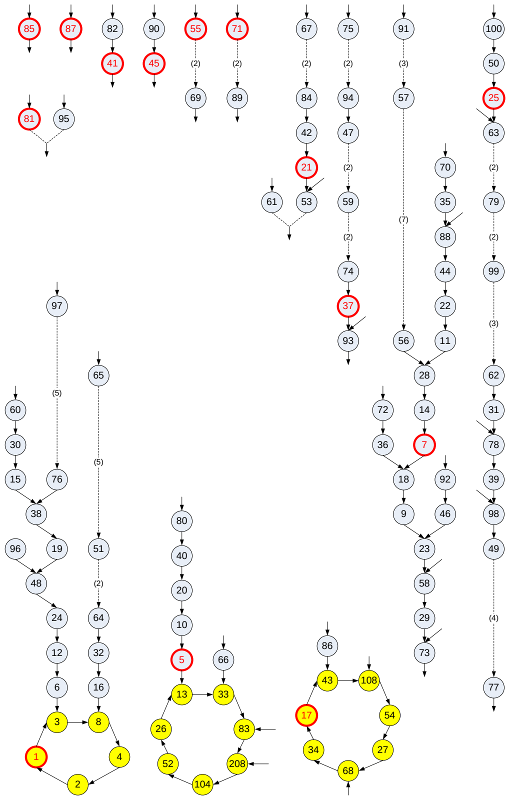


Verwante problemen: $5n+1$

De $5n+1$-functie:

$$T_{5,1}(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is,} \\ (5n+1)/2 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Er zijn (vermoedelijk) 3 cykels, en (vermoedelijk) oneindig veel divergente banen

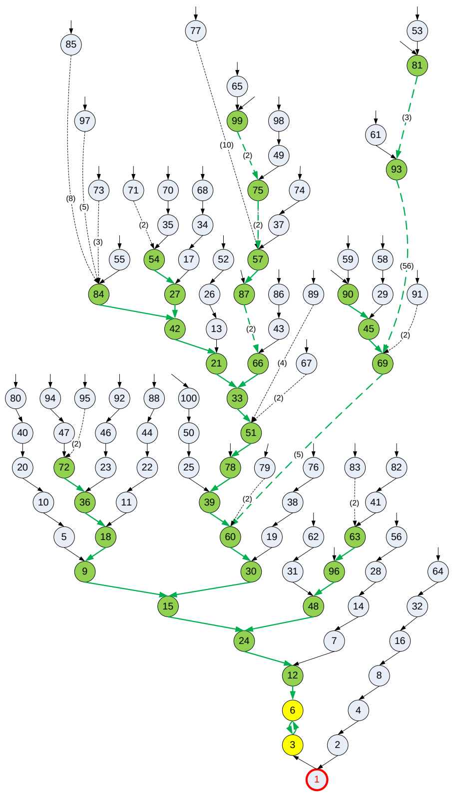


Verwante problemen: $3n+3$

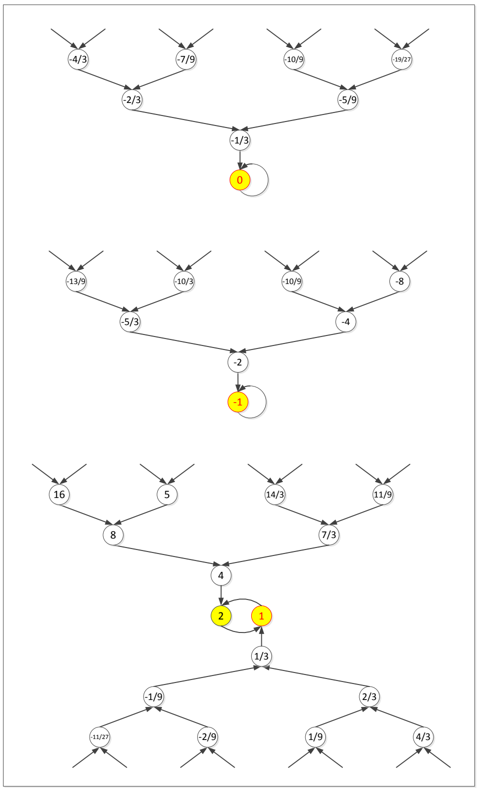
De $3n+3$-functie:

$$T_{3,3}(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even is,} \\ (3n+3)/2 & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

De deelgraaf van alle drievouden is isomorf met de $3n+1$-graaf



Verwante problemen: rationale $3n+1$



(even noemer is niet interessant: de teller is dan altijd oneven en dan is iteratie flauw)

Dit is in feite de $3n+q$-graaf voor alle oneven q tegelijk

Iedere $\frac{a}{b}$ met oneven b heeft nu twee voorgangers: $\frac{2a}{b}$ en $\frac{2a-b}{3b}$

Vermoedelijk zijn er geen divergente banen

Er zijn oneindig veel convergente banen, en die zijn goed te beschrijven

Alle cykels in de rationale $3n+1$-graaf

Iedere convergente baan eindigt in een cykel, en iedere cykel heeft een even-oneven - structuur:

lengte 1: 2 mogelijkheden: **e, o**
lengte 2: 1 mogelijkheid: **eo**
lengte 3: 2 mogelijkheden: **eeo, eoo**
lengte 4: 3 mogelijkheden: **eeeo, eeoo, eooo**
lengte 5: 6 mog.: **eeeeo, eeeoo, eeoeo, eeooo, eoeoo, eoooo**

enzovoorts, de zogeheten Lyndon-woorden.

Bij ieder Lyndon-woord is voor de cykel een vergelijking op te stellen die maar één oplossing heeft:

bv. bij **eoo** hoort $x \xrightarrow{\mathbf{e}} \frac{1}{2}x \xrightarrow{\mathbf{o}} \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \xrightarrow{\mathbf{o}} \frac{9}{8}x + \frac{5}{4} = x$ dus $x = -10$, dit geeft de bekende cykel $-10 \to -5 \to -7 \to -10$

Uit een gegeven cykel is de hele component achterwaarts te berekenen: op iedere node een complete binaire boom. Heel veel structuur!

Verwante problemen: De ‘inverse $3n+1$-functie’

$$U(n) = \begin{cases} (3n)/2 & \text{als } n \text{ even is,} \\ (3n+1)/4 & \text{als } n \equiv 1 \pmod 4, \\ (3n-1)/4 & \text{als } n \equiv -1 \pmod 4 \end{cases}$$

Is eigenlijk ouder dan de $3n+1$-functie T zelf (aldus Collatz) en is niet echt de inverse van T. Deze functie is een permutatie op $\mathbb{N}$.
John Conway noemt het de *amusicale permutatie*.

In de graaf heeft ieder getal dus precies één voorganger.

Cykels hebben geen inkomende zijtakken. Bekende cykels: (0), (1), $(2,3)$, $(4,6,9,7,5)$, $(44,66,99,74,111,83,62,93,70,105,79,59)$.

Divergente componenten hebben ook geen zijtakken. Een vermoedelijk divergent geval: $(\ldots, 13, 10, 15, 11, 8, 12, 18, 27, 20, \ldots)$.

Vermoedelijk zijn er geen andere cykels.
Vermoedelijk zijn er oneindig veel divergente componenten.

Experimenteel

Tomás Oliveira da Silva:

Het $3n+1$-vermoeden is waar voor alle $n < 5.764 \times 10^{18}$

Dit is een indrukwekkende prestatie!

Bruut rekenwerk, met een beetje boerenslimheid:

- je kunt stoppen met de baan van n als-ie onder de n is uitgekomen
- veel congruentieklassen modulo machten van 2 hoef je niet te doen, bv. $T^7(128m+15) = 81m+10 < 128m+15$

Toch is hiermee slechts 0% van het totale zoekgebied afgezocht...

Veel experimentele gegevens gevonden door Eric Roosendaal, zie `http://www.ericr.nl/wondrous/`

Probabilistisch

De T-functie geeft bij random even/oneven verdeelde invoer n ook random even/oneven verdeelde uitvoer $T(n)$.

Dan is $T(n) \approx \frac{3}{2}n$ met kans $1/2$, en $T(n) = \frac{1}{2}n$ met kans $1/2$, dus

$$T^k(n) \approx \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^k n.$$

Merk op dat $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0.866$. Na $k \approx 6.95 \log n$ stappen verwacht je bij 1 te zijn. Dit blijkt experimenteel heel aardig te kloppen.

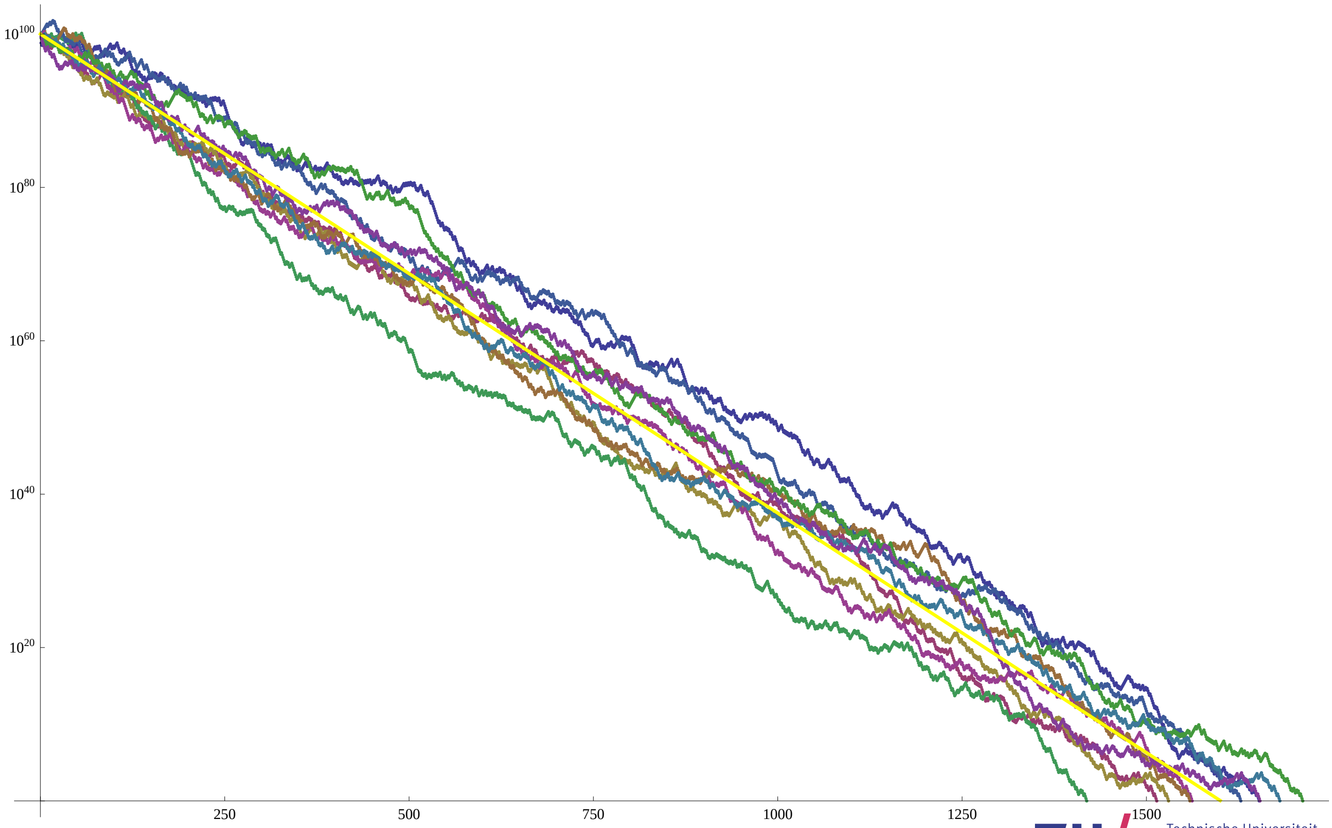
Argument werkt net zo goed voor $3n + q$ voor willekeurige q

Diepergaande stochastische modellen voorspellen dingen als:

- extreem hoge banen bereiken hoogste punt $\approx n^{2+o(1)}$ na $7.645 \log n$ stappen, dan nog $13.9 \log n$ stappen om bij 1 te komen
- extreem lange banen zullen niet langer worden dan $41.7 \log n$.

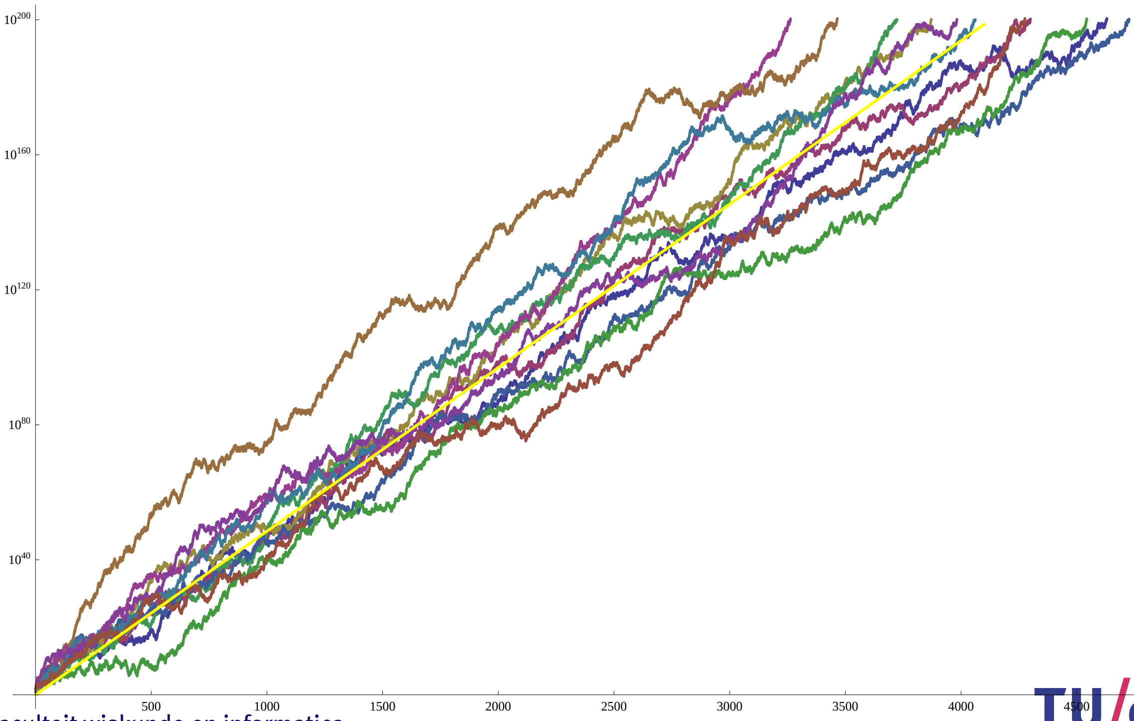
Dit soort modellen is allemaal experimenteel bevestigd.

Experiment voor $3n + 1$



Experiment voor $5n + 1$

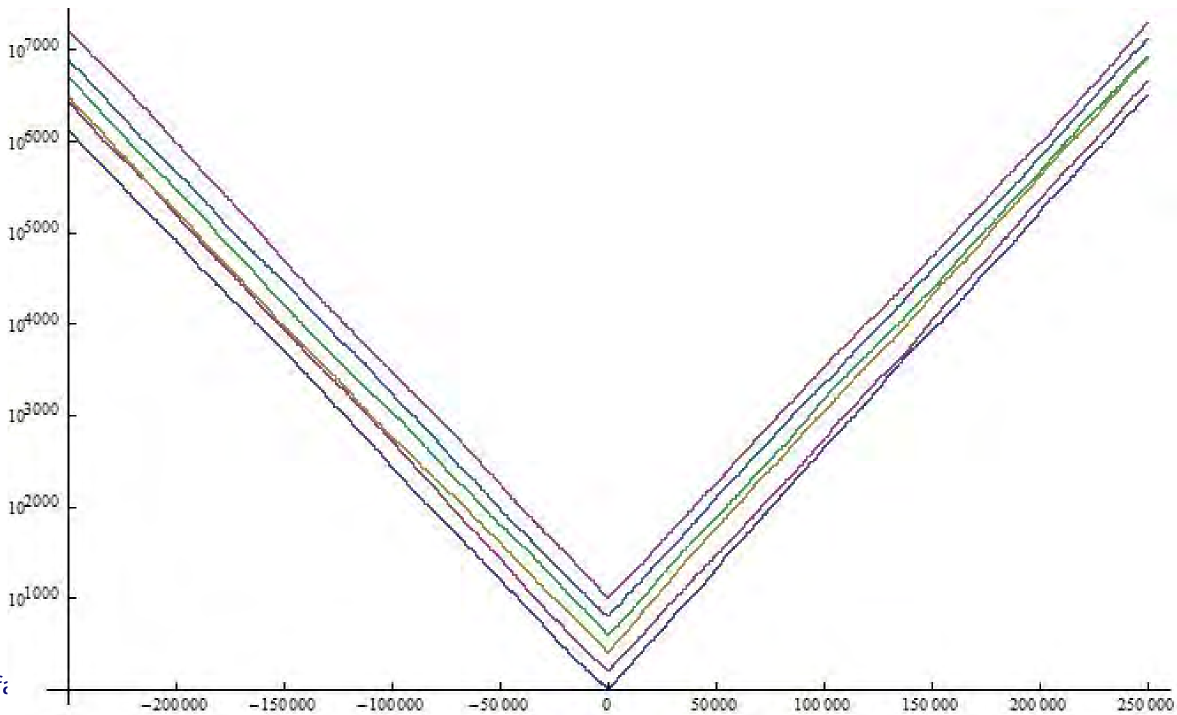
Argument werkt ook voor $5n + 1$: factor is nu $\frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1.12$, dus nu is divergentie zeer waarschijnlijk.



Technische Universiteit
Eindhoven
University of Technology

Experiment voor de amusicale permutatie

Voor de amusicale permutatie is de factor $\frac{3}{4}\sqrt{2} \approx 1.061$ voorwaarts, en $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4} \approx 1.058$ achterwaarts, dus nu is divergentie zowel voorwaarts als achterwaarts zeer waarschijnlijk.



echnische Universiteit
indhoven
Jniversity of Technology

Logisch en Complexiteitstheoretisch

Conway: er is een generalisatie van de $3n + 1$-functie deswelks iteratie een universele computer (Turingmachine) simuleert.

Voor deze functie is het beslisprobleem "bereikt een baan een willekeurige macht van 2" computationeel onbeslisbaar.

In zijn artikel “In unsettleable arithmetical problems” (Am. Math. Monthly **120** [maart 2013], 192–198) zegt John Conway:

“It is likely that some simple Collatzian problems (possibly even the $3n+1$ problem itself) will remain forever unsettleable.”

Maar laat dit u de moed niet ontnemen...

Diophantisch

Een m-cykel is een cykel voor de $3n + 1$-functie met m maxima en m minima.

De triviale cykel is een 1-cykel. N.B.: m is niet de lengte van de cykel.

Ray Steiner bewees in 1977 dat de triviale cykel de enige 1-cykel is. Het argument is grofweg dit:

Als je vanuit n eerst k stappen omhoog gaat en dan ℓ stappen omlaag, dan is $n = a2^k - 1$ met a oneven, en $T^{k+\ell}(n) = \frac{a3^k-1}{2^\ell}$, en $T^{k+\ell}(n) = n$ geeft dan $a(2^{k+\ell} - 3^k) = 2^\ell - 1$, en dus is $\frac{k+\ell}{k}$ een extreem goede rationale benadering van $\frac{\log 3}{\log 2}$: $\left|(k+\ell)\log 2 - k\log 3\right| < 2^{-(k-1)}$.

Transcendentietheorie (Alan Baker (1966), Georges Rhin (1987)) geeft een expliciete ondergrens $\left|(k+\ell)\log 2 - k\log 3\right| > k^{-13.3}$. Dus is er een expliciete bovengrens $k < 100$ (in Steiner’s tijd: $k < 10^{200}$).

Diophantisch (vervolg)

$\left|(k+\ell)\log 2 - k\log 3\right| < 2^{-(k-1)}$ is goed genoeg om zeker te weten dat $\frac{k+\ell}{k}$ een convergent van de kettingbreuk van $\frac{\log 3}{\log 2}$ is, en die zijn tot 10^{200} (of veel verder) makkelijk te berekenen.

De kettingbreuk is

$$\frac{\log 3}{\log 2} = [1,1,1,2,2,3,1,5,\ldots] = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cdots}}}}}}}$$

en de convergenten zijn de afgekapte kettingbreuk. Zij zijn precies de beste benaderingen: een beste benadering is een benadering zodat iedere breuk die dichter bij $\frac{\log 3}{\log 2}$ ligt een grotere teller en noemer heeft. De eerste paar zijn $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{19}{12}, \frac{65}{41}, \frac{84}{53}, \ldots$.

Diophantisch (vervolg)

Algemener: voor m maxima in een cykel noemen we K het aantal stappen omhoog en L het aantal stappen omlaag.

Richard Crandall (1978) bewees (elementair): als $\frac{p_n}{q_n}$ de n-e convergent is van de kettingbreuk van $\frac{\log 3}{\log 2}$ (met $n \geq 4$), dan is $K > \min\{q_n, \frac{2x_{\min}}{q_n+q_{n+1}}\}$.

Uit Oliveira da Silva's $x_{\min} > 5.764 \times 10^{18}$ volgt dan meteen:

Een eventuele niet-triviale cykel heeft lengte $K+L > 1.43 \times 10^{9}$.

John Simons (Groningen) bewees in 2004 met soortgelijke argumenten als Steiner dat er geen 2-cykels bestaan.

Simons & dW bewezen daarop in 2005-2010, gebaseerd op de ondergrens van Oliveira da Silva:

Er bestaan geen niet-triviale m-cykels met $m \leq 75$.

Grafen

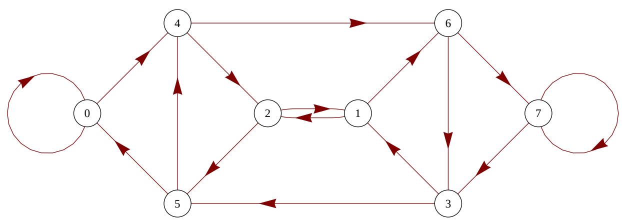
Het $3n+1$-vermoeden is equivalent met:

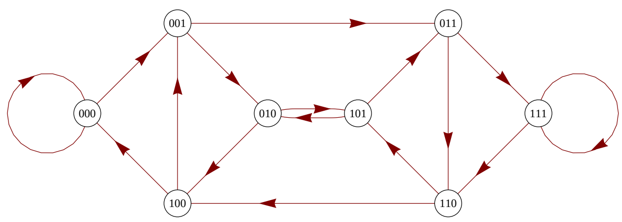
De $3n+1$-graaf is zwak samenhangend.

Dit is een herformulering die natuurlijk niet zo veel zegt.

Modulaire en De Bruijn-grafen

De modulaire graaf met modulus m bevat alle mogelijke pijlen van $n \pmod{m}$ naar $T(n) \pmod{m}$. Dit soort grafen blijkt weinig structuur te hebben, behalve als $m = 2^k$. Dan zijn het De Bruijn-grafen, die ontstaan uit de shiftafbeelding $a_1 a_2 \cdots a_n \to a_2 \cdots a_n *$, met $* \in \{0, 1\}$. (Laarhoven-dW 2013).





Technische Universiteit Eindhoven University of Technology

Conjugatie

Voor iedere $pn+q$-functie is de modulaire graaf met modulus 2^k dezelfde k-e orde De Bruijn-graaf. Alleen is de labeling van de punten in de graaf telkens anders (deze labeling is de conjugatie-afbeelding Φ_k).

$\Phi_k : n \to a_1 a_2 \cdots a_k$ met a_1 de pariteit van n, a_2 de pariteit van $T(n)$, $\ldots$, a_k de pariteit van $T^k(n)$.

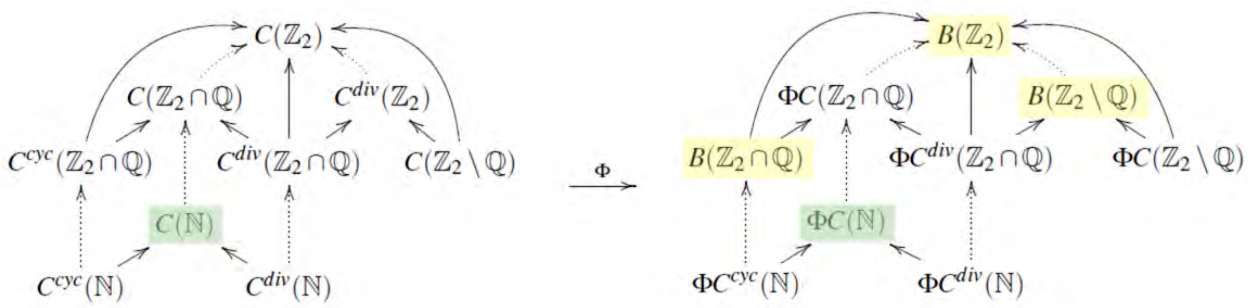
De graaf hangt dus niet van p, q af, de conjugatie-afbeelding die de modulaire $pn+q$-graaf afbeeldt op de De Bruijn-graaf, hangt sterk van p, q af.

De oneindige De Bruijn-graaf

Voor $k \to \infty$ krijg je de oneindige De Bruijn-graaf $B(\mathbb{Z}_2)$, gebaseerd op de shiftafbeelding op oneindige rijtjes: $a_1 a_2 \cdots \to a_2 \cdots$.

Deze graaf heeft alle mogelijke cykels (uit Lyndon-woorden) opgetuigd met binaire bomen, en overaftelbaar veel componenten zonder cykel, elk een naar twee kanten oneindige volledige binaire boom.

Een monsterachtig ding, maar met heel veel structuur. Hierin verstopt zitten alle interessante $pn+q$-grafen.



Oneindige matrices

Bij een graaf hoort een vierkante *verbindingsmatrix* $A = (a_{i,j})$ met $a_{i,j} = 1$ als er een pijl van i naar j loopt, en anders $a_{i,j} = 0$. Het spectrum van zo'n matrix zegt iets over de graaf.

De $3n+1$-graaf is oneindig, er hoort dus een oneindige matrix $A = (a_{i,j})$ bij met $a_{n,T(n)} = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, en anders $a_{i,j} = 0$. Deze graaf ziet er heel gestructureerd uit:

$$A = \left(\begin{array}{cccccccccccccc}
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \ddots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & \vdots & & & & & & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & &
\end{array}\right)$$

Machten van matrices

De k-e macht van A beschrijft paden van lengte k. Als we k laten groeien lijkt A^k op den duur alleen in de eerste twee kolommen iets over te houden:

$$A^{2k} = \begin{pmatrix}
1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot
\end{pmatrix}, \quad A^{2k+1} = \begin{pmatrix}
\cdot & 1 & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}$$

Het $3n+1$-vermoeden is equivalent met de bewering dat voor $k \to \infty$ de matrices A^{2k} en A^{2k+1} convergeren naar resp. $(a_0, a_1, 0, 0, \ldots)$ en $(a_1, a_0, 0, 0, \ldots)$, waarbij $a_0 + a_1 = (1, 1, 1 \ldots)$.

Eigenruimtes

Merk nu op dat $Aa_0 = a_1$ en $Aa_1 = a_0$, dus $a_0 + a_1$ is een eigenvector bij de eigenwaarde 1, en $a_0 - a_1$ is een eigenvector bij de eigenwaarde -1.

Bij een cykel van lengte k hoort een k-tal eigenvectoren, bij de k-e eenheidswortels als eigenwaarden.

Bij iedere cykel hoort precies één 1-dimensionale eigenruimte bij de eigenwaarde 1. Ook bij een divergente component hoort zo'n 1-dimensionale eigenruimte. De vector met 1tjes op de plekken van de component is voortbrengende eigenvector.

(Engl, 1982) De dimensie van de eigenruimte bij de eigenwaarde 1 is gelijk aan het aantal samenhangscomponenten in de graaf.
Het $3n + 1$-vermoeden is dus equivalent met de bewering dat de eigenruimte bij de eigenwaarde 1 van de matrix A ééndimensionaal is.

Het complete spectrum van A en $A^\top$ is inmiddels in kaart gebracht (Laarhoven & dW, artikel in voorbereiding).

Functionaalvergelijkingen

Berg en Meinardus (1994) gaan nog een andere interessante kant op. We bekijken de machtreeks $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n z^n$, waarbij we voorschrijven dat $e_n = e_{T(n)}$ voor alle n. Wat zou dit betekenen voor f?

We definieren $f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e_{3n+k} z^{3n+k}$ voor $k = 0, 1, 2$, dus $f = f_0 + f_1 + f_2$. Laat $\omega = e^{2\pi i/3}$. Nu hebben we $f_0(\omega z) = f_0(z)$, $f_1(\omega z) = \omega f_1(z)$, en $f_2(\omega z) = \overline{\omega} f_2(z)$. Hieruit volgt met enig rekenwerk dat $f_2(z) = \frac{1}{3}\left(f(z) + \omega f(\omega z) + \overline{\omega} f(\overline{\omega} z)\right)$.

Nu volgt:
$$\begin{aligned} f(z) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} e_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} e_{2n+1} z^{2n+1} \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} e_{T(2n)} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} e_{T(2n+1)} z^{2n+1} \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} e_n z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} e_{3n+2} z^{2n+1} \\ &= f(z^2) + z^{-1/3} f_2(z^{2/3}). \end{aligned}$$

f voldoet dus aan de functionaalvergelijking

$$3z\left(f(z^3) - f(z^6)\right) = f(z^2) + \omega f(\omega z^2) + \overline{\omega} f(\overline{\omega} z^2)$$

Functionaalvergelijkingen (vervolg)

$$3z\left(f(z^3) - f(z^6)\right) = f(z^2) + \omega f(\omega z^2) + \overline{\omega} f(\overline{\omega} z^2)$$

Deze functionaalvergelijking is lineair. Twee oplossingen zijn $f(z) = 1$ en $f(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \ldots$.

Ook hier geldt weer dat er een directe relatie is met samenhangscomponenten in de $3n + 1$-graaf.

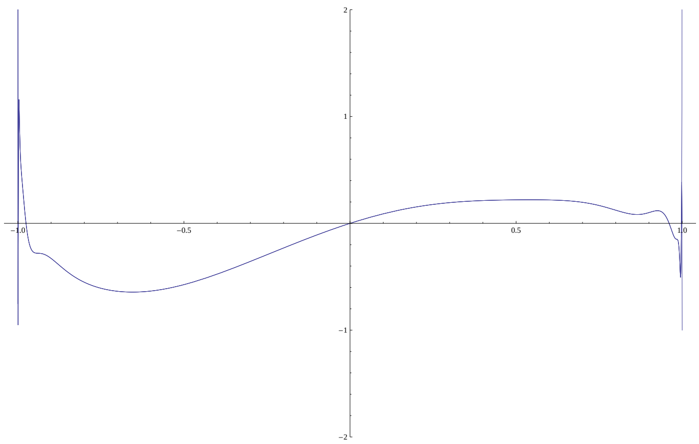
Het $3n + 1$-vermoeden is equivalent met de bewering dat deze functionaalvergelijking een tweedimensionale oplossingsruimte in machtreeksen heeft.

Functionaalvergelijkingen (vervolg)

Als we $e_n = -e_{T(n)}$ nemen dan vinden we de functionaalvergelijking

$$3z\left(-f(z^3) - f(z^6)\right) = f(z^2) + \omega f(\omega z^2) + \overline{\omega} f(\overline{\omega} z^2)$$

met als oplossing $f(z) = z - z^2 - z^3 + z^4 + z^5 + z^6 - z^7 - \ldots$, waar de ± 1 geeft aan of je met de $3n + 1$-functie in een even of een oneven aantal stappen bij 1 uitkomt. Het zou interessant zijn voor deze functie een gesloten uitdrukking te vinden.



De amusicale functionaalvergelijking

Doen we hetzelfde voor Conway's amusicale permutatie, dan krijgen we

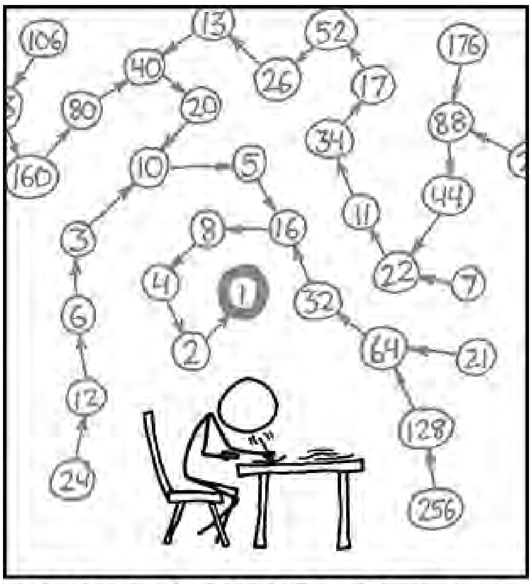
$$2z\left(2f(z^4) - f(z^6) - f(-z^6)\right) = \\ = (z^2+1)\left(f(z^3) - f(-z^3)\right) - i(z^2-1)\left(f(iz^3) - f(-iz^3)\right)$$

De vijf cykels in de graaf zijn nu echt losse componenten, dat betekent dat deze vergelijking polynomiale oplossingen heeft: $f(z) = 1$, $f(z) = z$, $f(z) = z^2 + z^3$, $f(z) = z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^9$ en

$$f(z) = z^{44}+z^{59}+z^{62}+z^{66}+z^{70}+z^{74}+z^{79}+z^{83}+z^{93}+z^{99}+z^{105}+z^{111}.$$

Het vermoeden is dat er niet meer onafhankelijke polynomiale oplossingen zijn. Wel zijn er (vermoedelijk oneindig veel onafhankelijke) machtreeks-oplossingen, zoals
$f(z) = z^8 + z^{10} + z^{11} + z^{12} + z^{13} + z^{15} + z^{17} + z^{18} + z^{20} + \ldots$.

http://xkcd.com/710/



THE COLLATZ CONJECTURE STATES THAT IF YOU PICK A NUMBER, AND IF IT'S EVEN DIVIDE IT BY TWO AND IF IT'S ODD MULTIPLY IT BY THREE AND ADD ONE, AND YOU REPEAT THIS PROCEDURE LONG ENOUGH, EVENTUALLY YOUR FRIENDS WILL STOP CALLING TO SEE IF YOU WANT TO HANG OUT.

Vragen?

Of is het tijd om uit te gaan hangen...